풀이

STEP III 1989, 문제 9

순수수학 • 거듭제곱급수의 합

STEP III 1989, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/89-s3-q9

핵심 아이디어

각 급수는 익숙한 거듭제곱급수(power series) $\sum a_r x^r$에 특정한 x 값을 대입한 것이다. 따라서 할 일은 그것이 어느 급수인지 알아보는 것이다. 첫 번째와 두 번째 급수는 기하급수(geometric series) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$에서 나온다. 기하급수를 미분하면 인수 r이 앞으로 내려오고, 적분하면 r로 나누어진다. 세 번째 급수에 나오는, 홀수들의 곱을 계승으로 나눈 꼴은 음의 분수 지수를 가진 이항전개(binomial expansion)에서 나타나는 꼴이다.

풀이

풀이 전체에서 $|x| < 1$일 때 성립하는 다음 식을 사용한다.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{r=1}^{\infty} x^{r-1}.$$

문제에서 수렴(convergence)은 신경 쓰지 않아도 된다고 했으므로, 항별로(term by term) 자유롭게 미분하고 적분한다. (여기서 사용하는 세 x 값은 모두 수렴구간(interval of convergence)의 안쪽 깊숙이 있으므로, 실제로도 이렇게 해도 문제가 없다.)

소문항 (i)

일반항은 $r\left(\frac{1}{2}\right)^{r-1}$이므로, $x = \frac{1}{2}$에서 $\sum r x^{r-1}$의 값을 구하면 된다. 기하급수를 항별로 미분하면

$$\sum_{r=1}^{\infty} r x^{r-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

$x = \frac{1}{2}$을 대입하면

$$1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \cdots = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 4.$$

소문항 (ii)

일반항은 $\frac{1}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^{r-1}$이다. r로 나누는 것은 미분으로 되돌려지므로, 이번에는 적분한다. 기하급수를 0부터 x까지 적분하면

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{x^r}{r} = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t} = -\ln(1-x).$$

여기서는 지수가 하나씩 크므로 ($x \neq 0$일 때) x로 나눈다.

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} x^{r-1} = -\frac{\ln(1-x)}{x}.$$

$x = \frac{1}{2}$을 대입하면

$$1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2^2} + \cdots = -\frac{\ln \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 2\ln 2.$$

소문항 (iii)

다음과 같이 놓는다.

$$c_k = \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2k-1)}{k!}, \qquad c_0 = 1.$$

? **생각해 보기** 홀수들의 곱을 $k!$로 나눈 꼴을 전에 어디에서 보았는가?

$(1+y)^{-1/2}$의 이항전개에서 보았다. y^k의 계수는

$$\binom{-\frac{1}{2}}{k} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2k-1}{2}\right)}{k!} = \frac{(-1)^k}{2^k} \cdot \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2k-1)}{k!} = \left(-\frac{1}{2}\right)^k c_k.$$

따라서 $y = -2x$로 놓으면 부호와 2의 거듭제곱이 상쇄된다.

$$(1-2x)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-2x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 1 + x + \frac{1 \times 3}{2!}x^2 + \frac{1 \times 3 \times 5}{3!}x^3 + \cdots,$$

이 식은 $|2x| < 1$일 때 성립한다.

이제 주어진 급수를 주의 깊게 살펴보자. 일반항은 $c_k \cdot \frac{1}{3^{k-1}} = 3c_k\left(\frac{1}{3}\right)^k$이고, 급수는 $k = 2$부터 시작한다(첫째항이 $\frac{1\times3}{2!} \times \frac{1}{3}$이다). 따라서 주어진 급수는 위 급수에 $x = \frac{1}{3}$을 대입하고

$k=0, k=1$인 항을 뺀 것의 3배이다.

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{\infty} c_k \frac{1}{3^{k-1}} &= 3\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(\tfrac{1}{3}\right)^k - c_0 - c_1 \cdot \tfrac{1}{3}\right) \\ &= 3\left(\left(1-\tfrac{2}{3}\right)^{-1/2} - 1 - \tfrac{1}{3}\right) \\ &= 3\left(\sqrt{3} - \tfrac{4}{3}\right) \\ &= 3\sqrt{3} - 4.\end{aligned}$$

여기서 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1/2} = \sqrt{3}$이고, $x = \frac{1}{3}$은 $|2x| < 1$을 만족한다.

검산

- 소문항 (i): 부분합(partial sum) 1, 2, 2.75, 3.25, 3.5625, …은 4를 향해 조금씩 커지고, 200개 항을 더하면 기계 정밀도 수준에서 4가 된다.
- 소문항 (ii): $2\ln 2 \approx 1.3863$이고, 부분합 1, 1.25, 1.3333, 1.3646, …도 이와 일치한다.
- 소문항 (iii): 항은 0.5, 0.2778, 0.1620, …이고, 400개 항을 더하면 1.196152…가 되어 $3\sqrt{3} - 4 \approx 1.1962$와 일치한다. 간단한 타당성 검사도 해 보자. 답은 양수이고 첫째항 0.5보다 커야 한다. 또한 $k=1$인 항을 빼는 것을 잊으면 $3\sqrt{3} - 3 \approx 2.196$이 나오는데, 항들이 대략 기하급수적으로 줄어들므로 이 값은 너무 크다. 따라서 이런 실수는 걸러진다.

흔한 실수

- (ii)에서 x로 나누는 것을 잊는 실수: $x = \frac{1}{2}$에서 $-\ln(1-x)$는 $\ln 2$가 되는데, 이는 답의 절반이다.
- (iii)에서 급수가 $k=2$부터 시작한다는 것을 알아채지 못하거나, $\frac{1}{3^{k-1}} = 3 \cdot \frac{1}{3^k}$에서 생기는 추가 인수 3을 빠뜨리는 실수.

STEP 너머

거듭제곱급수를 항별로 미분하고 적분하는 것은 수렴반지름(radius of convergence) 안에서 정당화된다. 거듭제곱급수는 수렴반지름보다 엄격히 안쪽에 있는 모든 닫힌구간에서 균등수렴(uniform convergence)하기 때문이다. 이는 대학 1학년 해석학(analysis)의 표준적인 결과이며, 이 문제에서 "수렴 문제는 고려하지 않아도 된다"고 해도 괜찮은 이유이다. 정수가 아닌 지수에 대한 이항급수도 바로 이런 종류의 거듭제곱급수이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해하기)는 균등수렴과 거듭제곱급수를 명료하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.