풀이

STEP III 1989, 문제 8

순수수학 • 연립 미분방정식

> **STEP III 1989, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/89-s3-q8

핵심 아이디어

첫 번째 방정식은 y를 x와 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$로 나타낸다. 따라서 이 식을 한 번 더 미분하면 나타나는 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$를 두 번째 방정식으로 바꿔 넣을 수 있고, 그러면 y가 완전히 사라진다. 그 결과 상수계수(constant coefficients) 2계 선형 미분방정식(second-order linear differential equation)이 남는다. 이 방정식의 보조방정식(auxiliary equation)은 중근(repeated root)을 가지며, 강제항(forcing term) 가운데 하나가 바로 그 근과 일치한다. 이 공명(resonance)이 이 문제의 진짜 시험대이다.

풀이

y 소거하기

t에 대한 도함수를 점으로 나타낸다. $\dot{x} = 4(x - y)$를 미분하고 $\dot{y}$에 두 번째 방정식을 대입하면

$$\ddot{x} = 4\dot{x} - 4\dot{y} = 4\dot{x} - 4x + 48\left(\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{-2t}\right),$$

을 얻는다. 따라서

$$\boxed{\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 48\left(\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{-2t}\right),}$$

이고, 이 식에는 y가 들어 있지 않다.

x 구하기

여함수(*complementary function*). 보조방정식 $m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2 = 0$은 중근 $m = 2$를 가지므로 여함수는

$$x_c = (A + Bt)\,\mathrm{e}^{2t}.$$

이다.

특수해(*particular integral*). 방정식이 선형이므로 두 강제항을 하나씩 따로 다룰 수 있다.

$48\mathrm{e}^{-2t}$에 대해서는 $x = D\mathrm{e}^{-2t}$로 놓아 본다. 대입하면 $D(4+8+4)\mathrm{e}^{-2t} = 48\mathrm{e}^{-2t}$이므로 $D = 3$이다.

> **생각해 보기** $48\mathrm{e}^{2t}$ 항에 대해서는 왜 $C\mathrm{e}^{2t}$는 물론이고 $Ct\,\mathrm{e}^{2t}$조차 통하지 않을까?

e^{2t}와 $t\,\mathrm{e}^{2t}$는 모두 이미 여함수에 들어 있으므로, 좌변은 이들을 0으로 보낸다. 2가 중근이므로 $t^2\mathrm{e}^{2t}$까지 올라가야 한다. $x = Ct^2\mathrm{e}^{2t}$로 놓아 보자. 깔끔하게 대입하는 방법은 $x = u\,\mathrm{e}^{2t}$로 쓰는 것이다. 그러면

$$\dot{x} = (\dot{u} + 2u)\mathrm{e}^{2t}, \qquad \ddot{x} = (\ddot{u} + 4\dot{u} + 4u)\mathrm{e}^{2t},$$

이므로

$$\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = \ddot{u}\,\mathrm{e}^{2t}.$$

이다. $u = Ct^2$이면 이 값은 $2C\mathrm{e}^{2t}$이므로 $2C = 48$, 곧 $C = 24$이다. (이 치환은 여함수가 왜 $(A+Bt)\mathrm{e}^{2t}$인지도 보여 준다. $\ddot{u} = 0$이어야 하기 때문이다.)

따라서 일반해(general solution)는

$$x = (A + Bt)\,\mathrm{e}^{2t} + 24t^2\mathrm{e}^{2t} + 3\mathrm{e}^{-2t}.$$

이다.

초기조건(*initial conditions*). 주어진 것은 $x(0) = 0$과 $y(0) = 0$뿐이다. 2계 방정식에는 $\dot{x}(0)$이 필요한데, 원래의 첫 번째 방정식이 이를 알려 준다. 곧 $\dot{x}(0) = 4(x(0) - y(0)) = 0$이다.

$x(0) = 0$에서 $A + 3 = 0$이므로 $A = -3$이다. 미분하면

$$\dot{x} = (B + 2A + 2Bt + 48t + 48t^2)\mathrm{e}^{2t} - 6\mathrm{e}^{-2t},$$

이므로 $\dot{x}(0) = B + 2A - 6 = 0$이고, 따라서 $B = 12$이다. 그러므로

$$\boxed{x = \left(24t^2 + 12t - 3\right)\mathrm{e}^{2t} + 3\mathrm{e}^{-2t}.}$$

이다.

y 구하기

첫 번째 방정식에서 $y = x - \frac{1}{4}\dot{x}$이므로 미분방정식을 또 풀 필요가 없다. $A = -3$, $B = 12$이면

$$\dot{x} = \left(48t^2 + 72t + 6\right)\mathrm{e}^{2t} - 6\mathrm{e}^{-2t},$$

이므로

$$\begin{aligned} y &= \left(24t^2 + 12t - 3\right)\mathrm{e}^{2t} + 3\mathrm{e}^{-2t} - \left(12t^2 + 18t + \tfrac{3}{2}\right)\mathrm{e}^{2t} + \tfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-2t} \\ &= \left(12t^2 - 6t - \tfrac{9}{2}\right)\mathrm{e}^{2t} + \tfrac{9}{2}\mathrm{e}^{-2t}. \end{aligned}$$

이다. 곧

$$\boxed{y = \tfrac{3}{2}\left(8t^2 - 4t - 3\right)\mathrm{e}^{2t} + \tfrac{9}{2}\mathrm{e}^{-2t}.}$$

이다.

검산

- $t = 0$에서 $y(0) = -\frac{9}{2} + \frac{9}{2} = 0$이다. 이 조건은 직접 부과한 적이 없으므로 진정한 검산이 된다.
- y를 소거하는 데에만 사용한 두 번째 방정식도 성립해야 한다. 미분하면

  $$\dot{y} = \left(24t^2 + 12t - 15\right)\mathrm{e}^{2t} - 9\mathrm{e}^{-2t},$$

  이고

  $$x - 12\left(\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{-2t}\right) = \left(24t^2 + 12t - 15\right)\mathrm{e}^{2t} - 9\mathrm{e}^{-2t}.$$

  이다. 두 식이 일치한다.
- 수치적으로, 룽게–쿠타 방법(Runge–Kutta method)으로 원래의 연립방정식을 $(0, 0)$에서부터 앞으로 진행시키면 $x(1) \approx 244.2449$, $y(1) \approx 11.6926$을 얻는다. 공식으로 구한 값은 $33\mathrm{e}^2 + 3\mathrm{e}^{-2}$와 $\frac{3}{2}\mathrm{e}^2 + \frac{9}{2}\mathrm{e}^{-2}$이며, 이들은 같은 값을 가진다.

흔한 실수

- 공명하는 항에 대해 $Ct\,\mathrm{e}^{2t}$를 시도하는 것. 근 2가 중근이므로 $t^2\mathrm{e}^{2t}$가 필요하다.
- 두 번째 초기조건이 어디서 오는지 알아차리지 못하는 것. $\dot{x}(0) = 0$이라는 값은 첫 번째 방정식과 $x(0) = y(0)$ 속에 숨어 있다.
- y에 대한 2계 방정식을 따로 푸는 것. 그러면 새로운 상수가 두 개 생기고, 이를 다시 x와 맞추어야 한다. $y = x - \frac{1}{4}\dot{x}$를 이용하면 이런 수고를 피할 수 있다.

STEP 너머

y를 소거하는 것은 선형 연립방정식을 푸는 한 가지 방법이다. 대학에서는 이를 $M = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$에 대하여 $\dot{\mathbf{v}} = M\mathbf{v} + \mathbf{f}(t)$로 쓴다. 여기서 M은 중복 고윳값(eigenvalue) 2를 가지지만 고유벡터(eigenvector)는 하나뿐이므로 대각화(diagonalisation)할 수 없으며, $t\,\mathrm{e}^{2t}$ 항이 생기는 이유가 바로 여기에 있다. 조르당 표준형(Jordan normal form)과 행렬 지수함수(matrix exponential) e^{Mt}를 쓰면 이를 엄밀하게 설명할 수 있다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 고윳값이 중복되는 경우를 포함하여 선형 연립미분방정식을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.