풀이

STEP III 1989, 문제 7

순수수학 • 층밀림 행렬

> **STEP III 1989, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/89-s3-q7

핵심 아이디어

모든 것은 두 단위벡터(unit vector)로 나타낼 때 가장 쉽다. 하나는 직선 $L\colon y = x\tan\alpha$ 방향의 $\mathbf{u}$이고, 다른 하나는 그에 수직인 $\mathbf{n}$이다. 층밀림(shear)은 각 점을 $\mathbf{u}$에 평행하게, L로부터의 부호 있는 거리(signed distance)에 비례하는 만큼 옮기므로 $\mathbf{M} = \mathbf{I} + k\,\mathbf{u}\mathbf{n}^{\mathsf{T}}$이다. 두 번째 부분에서는, 어떤 행렬이 $\mathbf{I} + k\mathbf{A}$와 교환 가능(commute)한 것은 $\mathbf{A}$와 교환 가능한 것과 정확히 동치라는 사실을 이용하면 번잡한 계산이 사라진다.

풀이

$s = \sin\alpha$, $c = \cos\alpha$라 하자. α가 예각이므로 $s > 0$이고 $c > 0$이다.

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{n} = \begin{pmatrix} -s \\ c \end{pmatrix}$$

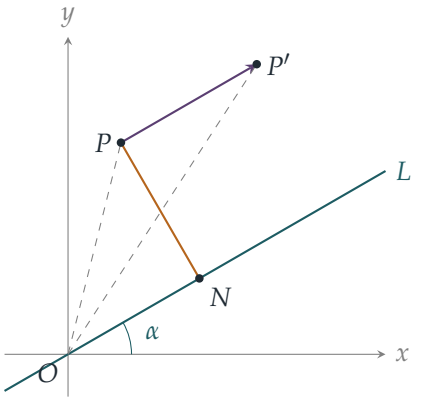
라 두면, $\mathbf{u}$는 L 방향으로 x축과 각 α를 이루는 단위벡터이고, $\mathbf{n}$은 L의 왼쪽 위를 향하는 단위 법선벡터(unit normal)이다.

M 구하기

$P = (x, y)$에 대해

$$d = \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{OP} = y\cos\alpha - x\sin\alpha$$

라 하자. 이는 P에서 L까지의 **부호 있는** 거리이다. 그러면 $PN = |d|$이고, $d > 0$인 것은 P가 L 위쪽에 있는 것과 정확히 동치이다.



P를 L 위쪽에 잡자. 그러면 $d > 0$이다. (i)에 의해 $\overrightarrow{PP'}$는 $\mathbf{u}$ 방향이므로, $\overrightarrow{PP'} = \lambda\mathbf{u}$이고 $\lambda > 0$이다. 조건 (ii)도 이와 모순되지 않는다. 2차원 외적(cross product)은

$$\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} \times (\overrightarrow{OP} + \lambda\mathbf{u}) = \lambda\,(xs - yc) = -\lambda d < 0$$

이므로, OP에서 OP'으로의 회전은 요구한 대로 시계 방향이다. 조건 (iii)에서 $\lambda = k\,PN = kd$를 얻는다. (이 조건들이 함께 성립하려면 $k > 0$이어야 한다.) 따라서 L 위쪽의 모든 P에 대해

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + kd\,\mathbf{u} = \overrightarrow{OP} + k\,\mathbf{u}\,(\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{OP})$$

이다.

생각해 보기 지금까지 L 위쪽의 점만 사용했다. 그런데도 왜 $\mathbf{M}$이 완전히 결정되는가?

T는 선형(linear)이고, 사상 $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} + k\,\mathbf{u}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})$도 선형이다. 두 사상은 L 위쪽의 열린 반평면에서 일치하며, 이 반평면은 일차독립(linearly independent)인 두 벡터(예를 들어 $\mathbf{n}$과 $\mathbf{n} + \mathbf{u}$)를 포함한다. 기저(basis)에서 일치하는 두 선형사상은 같다. 따라서 모든 벡터에 대해

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} + k\,\mathbf{u}\mathbf{n}^{\mathsf{T}} = \mathbf{I} + k\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -s & c \end{pmatrix} = \mathbf{I} + k\begin{pmatrix} -sc & c^2 \\ -s^2 & sc \end{pmatrix}$$

이다. 즉,

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 - k\sin\alpha\cos\alpha & k\cos^2\alpha \\ -k\sin^2\alpha & 1 + k\sin\alpha\cos\alpha \end{pmatrix}$$

이고, 이것이 요구한 결과이다. 검산 삼아 확인하면, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0$이므로 $\mathbf{M}\mathbf{u} = \mathbf{u}$이고, 따라서 L 위의 각 점은 고정된다. 또한 $\det\mathbf{M} = 1 - k^2s^2c^2 + k^2s^2c^2 = 1$인데, 층밀림이라면 마땅히 그래야 한다.

교환 조건

$\mathbf{A} = \mathbf{u}\mathbf{n}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} -sc & c^2 \\ -s^2 & sc \end{pmatrix}$, $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & t \end{pmatrix}$라 하자. $\mathbf{M} = \mathbf{I} + k\mathbf{A}$이고 $\mathbf{I}$는 모든 행렬과 교환 가능하므로

$$\mathbf{X}\mathbf{M} - \mathbf{M}\mathbf{X} = k(\mathbf{X}\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{X})$$

이다. $k \neq 0$이므로, $\mathbf{X}$가 $\mathbf{M}$과 교환 가능한 것은 $\mathbf{A}$와 교환 가능한 것과 동치이다. 곱을 계산하면

$$\mathbf{X}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -psc - qs^2 & pc^2 + qsc \\ -rsc - ts^2 & rc^2 + tsc \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -psc + rc^2 & -qsc + tc^2 \\ -ps^2 + rsc & -qs^2 + tsc \end{pmatrix},$$

이므로

$$\mathbf{X}\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -(qs^2 + rc^2) & -c^2(t-p) + 2qsc \\ -s^2(t-p) - 2rsc & qs^2 + rc^2 \end{pmatrix}$$

이다. 이것이 영행렬인 것은 다음과 동치이다.

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad qs^2 + rc^2 = 0, \\ &\text{(b)} \quad c^2(t-p) = 2qsc, \\ &\text{(c)} \quad s^2(t-p) = -2rsc. \end{aligned}$$

$c \neq 0$이므로 (b)는 $t - p = 2q\tan\alpha$와 같다. $s \neq 0$이므로 (c)는 $t - p = -2r\cot\alpha$와 같다.

> ? **생각해 보기** 식은 세 개인데 문제에 주어진 조건에는 두 개만 있다. (a)는 어떻게 된 것인가?

(a)는 나머지 두 식에서 따라 나온다. $2q\tan\alpha = -2r\cot\alpha$이면, 양변에 $\frac{1}{2}sc$를 곱하여 $qs^2 = -rc^2$를 얻는데, 이것이 바로 (a)이다. 따라서

$$\mathbf{X}\mathbf{M} = \mathbf{M}\mathbf{X} \iff t - p = 2q\tan\alpha = -2r\cot\alpha$$

이다. 위의 모든 단계가 동치이므로 양방향 모두 성립한다. 이것이 구하는 필요충분조건(necessary and sufficient condition)이다.

검산

▶ $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $k = 2$로 두면 $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$를 얻는다. $y = x$ 위쪽으로 거리 $\frac{1}{\sqrt{2}}$만큼 떨어진 점 $(0,1)$은 $(1,2)$로 옮겨진다. 이는 45° 방향으로 $\sqrt{2} = 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$만큼 이동한 것이며, 회전 방향은 시계 방향이다.

- $\mathbf{X} = \mathbf{M}$ 자신도 조건을 만족한다. $t - p = 2ksc$, $2q\tan\alpha = 2kc^2 \cdot \frac{s}{c} = 2ksc$이고 $-2r\cot\alpha = 2ks^2 \cdot \frac{c}{s} = 2ksc$이다. $\mathbf{I}$도 세 식의 값이 모두 0이 되어 조건을 만족한다.
- 수치적으로, 임의의 α, k와 L 위쪽의 임의의 P에 대해 $\mathbf{M}$은 (i)–(iii)을 재현했다. 조건을 만족하는 임의의 행렬은 10^{-8} 이내의 오차로 $\mathbf{M}$과 교환 가능했고, 조건을 만족하지 않는 임의의 행렬은 그렇지 않았다.

흔한 실수

- 모든 점에 대해 부호 없는 거리 PN을 사용하는 것. 변위는 **부호 있는** 거리의 k배이다. L 아래쪽의 점은 반대 방향으로 움직이며, 바로 이 때문에 T가 선형이 된다.
- 교환 조건에 대해 "if" 방향만(또는 "only if" 방향만) 증명하거나, $(1,1)$ 성분이 새로운 정보를 주지 않음을 보이는 것을 잊는 것.

STEP 너머

여기서 $\mathbf{M}$과 교환 가능한 행렬은 정확히 $a\mathbf{I} + b\mathbf{A}$ 꼴의 행렬이다. $t - p = 2q\tan\alpha = -2r\cot\alpha$가 매개변수가 두 개인 족임을 확인해 보라. 이는 더 일반적인 사실의 한 예이다. $\mathbf{I}$의 상수배가 아닌 2×2 행렬에 대해, 그것과 교환 가능한 행렬은 정확히 $a\mathbf{I} + b\mathbf{M}$이다. $n \times n$ 행렬의 경우에는 최소다항식(minimal polynomial)이 특성다항식(characteristic polynomial)과 같을 때 이와 유사한 사실(교환 가능한 행렬은 $\mathbf{M}$의 다항식이다)이 성립한다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 랭크 1 행렬(rank-one matrix) $\mathbf{u}\mathbf{n}^{\mathsf{T}}$와 그 배경이 되는 아이디어를 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.