풀이

STEP III 1989, 문제 6

순수수학 • 이차곡선의 극방정식

> **STEP III 1989, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/89-s3-q6

핵심 아이디어

극좌표(polar coordinates)에서 원점을 지나지 않는 직선은 $1/r$이 $\cos\theta$와 $\sin\theta$의 일차결합으로 나타나며, 이를 $A\cos\theta + B\cos(\theta-\gamma)$ 꼴로 쓰면 원뿔곡선(conic) 자체의 $\cos\theta$ 항과 정확히 맞출 수 있다. $e\cos\theta$ 부분이 일치하고 나면 현(chord)의 방정식은 코사인 하나만 맞추면 되고, 나머지는 $\theta=\gamma$에 대한 대칭(symmetry)이 해결해 준다. 현을 한 점으로 줄여 가면 접선(tangent)을 얻고, 접선의 방정식으로부터 이등분선(bisector) 성질은 거의 저절로 나온다.

풀이

이 풀이 전체에서 (r,θ)는 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$인 극좌표이며, $r<0$도 허용한다(점 (r,θ)는 $(-r,\theta+\pi)$와 같은 점이다). 원뿔곡선의 초점(focus) S는 원점에 있다.

극형식으로 나타낸 직선

$lx+my=1$은 원점을 지날 수 없으므로 그 위에서 $r\neq 0$이고, r로 나누면

$$\frac{1}{r} = l\cos\theta + m\sin\theta.$$

을 얻는다. 제시된 꼴을 전개하면

$$A\cos\theta + B\cos(\theta-\gamma) = (A + B\cos\gamma)\cos\theta + B\sin\gamma\,\sin\theta.$$

이다. $B\sin\gamma = m$이고 $A + B\cos\gamma = l$이면 두 식은 모든 θ에 대하여 일치한다. $\sin\gamma\neq 0$이므로

$$B = \frac{m}{\sin\gamma}, \qquad A = l - m\cot\gamma,$$

로 잡을 수 있고, 이것이 구하는 극방정식이다. 역으로, 두 계수가 모두 0이 되지 않는 A, B에 대하여 방정식 $1/r = A\cos\theta + B\cos(\theta-\gamma)$는 $l = A + B\cos\gamma$, $m = B\sin\gamma$인 직선 $lx + my = 1$이다. 이 꼴은 $(r,\theta) \to (-r,\theta+\pi)$에 의해 변하지 않으므로, r의 부호를 어느 쪽으로 쓰든 직선 전체를 나타낸다는 점에 유의한다.

현 PQ

현을 $a/r = A\cos\theta + B\cos(\theta-\gamma)$ 꼴로 찾아보자. P와 Q에서는 $\theta = \gamma \mp \delta$이고 $a/r = 1 + e\cos\theta$이므로

$$A\cos(\gamma\mp\delta) + B\cos(\mp\delta) = 1 + e\cos(\gamma\mp\delta).$$

이 성립해야 한다. 두 점 모두에서 $\cos(\mp\delta) = \cos\delta$이므로, $A = e$, $B\cos\delta = 1$로 택하면 두 방정식이 한꺼번에 만족되며, $\cos\delta \neq 0$이므로 B를 구할 수 있다. 서로 다른 두 점은 직선 하나를 결정하므로 현 PQ는

$$\boxed{\frac{a}{r} = e\cos\theta + \sec\delta\,\cos(\theta-\gamma).}$$

이다. ($\cos\delta = 0$이면 P와 Q는 $\theta = \gamma \mp \frac{\pi}{2}$에 있고, PQ는 초점현(focal chord)이 된다. 원점을 지나는 직선은 $1/r = \ldots$ 꼴의 방정식을 갖지 않으며, 이 때문에 그 경우는 제외된다.)

? **생각해 보기** 현이 원뿔곡선과 P와 Q에서만 만난다는 것을 어떻게 알 수 있는가?

각 θ에서 원뿔곡선 위의 점은 $a/r = 1 + e\cos\theta$인 점 하나뿐이다. 현이 그 점을 지나는 것은 $1 + e\cos\theta = e\cos\theta + \sec\delta\cos(\theta-\gamma)$, 즉 $\cos(\theta-\gamma) = \cos\delta$일 때이고, 따라서 $\theta = \gamma \pm \delta$일 때뿐이다. $e\cos\theta$ 항이 소거되는데, 바로 이것이 $A = e$로 택한 이유이다.

$\theta = \gamma$에서의 접선

$\theta = \gamma$인 점 G에서의 접선은 P와 Q가 G로 다가갈 때, 즉 $\delta \to 0$일 때 현 PQ의 극한이다. 현의 방정식은 δ에 연속적으로 의존하고 $\sec\delta \to 1$이므로 접선은

$$\boxed{\frac{a}{r} = e\cos\theta + \cos(\theta-\gamma).}$$

이다. 확인해 보면, 이 직선은 원뿔곡선과 $\cos(\theta-\gamma) = 1$인 곳, 즉 G에서만 만나므로 접선답게 행동한다. 더 결정적으로, 직교좌표로 쓰면 접선은 $(e+\cos\gamma)x + (\sin\gamma)y = a$이고 법선벡터(normal vector)는 $(e+\cos\gamma,\ \sin\gamma)$이다. 원뿔곡선은 $r = a - ex$이며, 곡선을 따라 미분하면 $(x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y)/r = -e\,\mathrm{d}x$, 즉 $(e + x/r)\,\mathrm{d}x + (y/r)\,\mathrm{d}y = 0$을 얻는다. G에서 $x/r = \cos\gamma$이고 $y/r = \sin\gamma$이므로, 그 점에서 곡선의 법선은 같은 벡터이다.

마지막 부분

초점 S를 원점에 두어 원뿔곡선을 $a/r = 1 + e\cos\theta$라 하고, L과 M을 각각 $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$인 점이라 하자.

$$\gamma = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta), \qquad \delta = \tfrac{1}{2}(\beta - \alpha),$$

로 두면 L과 M은 위의 P, Q와 똑같이 $\theta = \gamma - \delta$와 $\gamma + \delta$에 있다. 앞의 결과에 의해 L과 M에서의 접선은

$$\frac{a}{r} = e\cos\theta + \cos(\theta - \alpha), \qquad \frac{a}{r} = e\cos\theta + \cos(\theta - \beta).$$

이다. T에서는 두 식이 모두 성립하므로 $\cos(\theta - \alpha) = \cos(\theta - \beta)$이다. 따라서 $\theta - \alpha = \theta - \beta + 2k\pi$이거나(이 경우 $L = M$이 된다)

$$\theta - \alpha = -(\theta - \beta) + 2k\pi \quad \Longrightarrow \quad \theta = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) + k\pi = \gamma + k\pi.$$

이다. 그러므로 T는 S를 지나고 방향이 $\theta = \gamma$인 직선 위에 있으며,

$$r_T = \frac{a}{e\cos\gamma + \cos\delta}$$

이다(두 접선이 평행하여 T가 존재하지 않는 것은 정확히 $e\cos\gamma + \cos\delta = 0$일 때이다).

반직선 SL과 SM은 각각 $\alpha = \gamma - \delta$와 $\beta = \gamma + \delta$ 방향을 향한다(타원(ellipse)이나 포물선(parabola)처럼 L과 M에서 $r > 0$인 보통의 경우를 생각한다). 직선 $\theta = \gamma$는 이 두 반직선 각각과 각 δ를 이루므로, 직선 ST는 각 LSM을 이등분한다. ($r_T < 0$이면 T는 반대쪽 반직선 위에 있고, ST는 우각(reflex angle) LSM을 이등분한다. 이때에도 각 LST와 MST는 여전히 같다.)

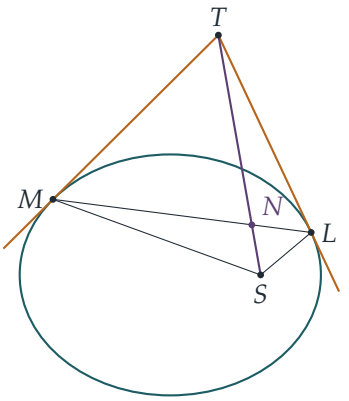
ST가 LM과 만나는 점을 구하기 위해 그 점을 N이라 하자. 현 LM은 $a/r = e\cos\theta + \sec\delta\cos(\theta - \gamma)$이고, ST 위에서는 $\theta = \gamma$이므로

$$\frac{a}{SN} = e\cos\gamma + \sec\delta \quad \Longrightarrow \quad SN = \frac{a\cos\delta}{1 + e\cos\gamma\cos\delta}.$$

이다. $2\cos\gamma\cos\delta = \cos(\gamma - \delta) + \cos(\gamma + \delta) = \cos\alpha + \cos\beta$를 이용하면 이는

$$\boxed{N\text{의 위치는} \theta = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta), \quad r = \frac{2a\cos\frac{1}{2}(\beta - \alpha)}{2 + e\cos\alpha + e\cos\beta}.}$$

가 된다. LM이 초점현일 때($\cos\delta = 0$) 이 식은 당연히 $N = S$를 준다.



검산

- 원(circle)($e = 0$, 반지름 a)으로 확인해 보자. 접선은 $a/r = \cos(\theta - \gamma)$, 즉 $x\cos\gamma + y\sin\gamma = a$가 되며, 이는 익숙한 $x^2 + y^2 = a^2$의 접선이다.
- 삼각형 LSM에서 각의 이등분선 정리(angle bisector theorem)에 따르면 $LN : NM = SL : SM$이다. $a = 1.5$, $e = 0.6$, $\alpha = 40°$, $\beta = 160°$(그림의 경우)로 두면 $SN \approx 0.791$이고, 비율도 수치적으로 맞는다.
- 컴퓨터로 수천 개의 무작위 원뿔곡선과 점에 대하여 현과 접선의 방정식, ST의 방향, 각의 상등, SN의 공식을 검사하였다.

흔한 실수

- $\cos(\theta - \alpha) = \cos(\theta - \beta)$를 $+$ 부호만으로 푸는 것. 그 갈래에서는 아무것도 얻지 못하며($\alpha = \beta$가 필요하다), 쓸모 있는 해는 $-$ 부호에서 나온다.
- A를 자유롭게 고를 수 있다는 점을 활용하지 않는 것. $A = e$로 택해야 원뿔곡선과의 교점을 구할 때 $e\cos\theta$ 항이 소거된다.

STEP 너머

ST가 $\angle LSM$을 이등분한다는 결과는 원뿔곡선의 고전적인 초점 성질이며, 직선 LM은 원뿔곡선에 대한 T의 **극선**(polar)이다. 극–극선 쌍대성(pole–polar duality)은 사영기하학(projective geometry)으로 들어가는 관문으로, 사영기하학에서는 비퇴화(non-degenerate) 원뿔곡선이 모두 동등하며 접함(tangency)과 결합(incidence)이 순수하게 대수적인 문제가 된다. Brannan, Esplen, Gray의 *Geometry*(기하학)는 원뿔곡선과 사영기하학을 대학 1학년 수준에서 잘 다룬 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.