풀이

STEP III 1989, 문제 5

순수수학 • 체비쇼프 다항식

> **STEP III 1989, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/89-s3-q5

핵심 아이디어

$x = \cosh\theta$로 놓는다. 그러면 $e^{\pm\theta}$는 정확히 $x \pm \sqrt{x^2-1}$이고, $y = \cosh n\theta$는 이 둘의 n제곱의 평균이다. 이 거듭제곱을 이항정리(binomial theorem)로 전개하면 $\sqrt{x^2-1}$의 홀수 제곱 항이 서로 소거되므로, 남는 것은 x에 대한 다항식(polynomial)이다. 이 다항식을 깔끔한 꼴로 정리하고 나면, 각 계수(coefficient)는 이항계수(binomial coefficient)의 짧은 합일 뿐이다.

풀이

닫힌 꼴

$\theta = \cosh^{-1} x$라 하면 $\theta \geq 0$이고 $x = \cosh\theta$이다. 이때 $\sinh\theta \geq 0$이고 $\sinh^2\theta = x^2 - 1$이므로 $\sinh\theta = \sqrt{x^2-1}$이다. 따라서

$$e^{\theta} = \cosh\theta + \sinh\theta = x + \sqrt{x^2-1}, \qquad e^{-\theta} = \cosh\theta - \sinh\theta = x - \sqrt{x^2-1}.$$

그러므로

$$y = \cosh n\theta = \frac{e^{n\theta} + e^{-n\theta}}{2} = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n}{2},$$

이고, 이것이 보이려던 식이다.

y가 홀수차 항만 갖는 다항식인 이유

$s = \sqrt{x^2-1}$로 쓴다. 이항정리에 의해

$$(x+s)^n + (x-s)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} s^j (1 + (-1)^j) = 2 \sum_{j \text{ 짝수}} \binom{n}{j} x^{n-j} s^j.$$

s의 홀수 제곱 항은 소거되고, 짝수 제곱 $s^{2m} = (x^2-1)^m$은 모두 x에 대한 다항식이다. 따라서

$$y = \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2m} x^{n-2m}(x^2-1)^m.$$

이제 $n = 2k+1$로 두면 m은 0부터 k까지 움직인다. 각 항은 홀수 제곱 $x^{2k+1-2m}$에 x^2에 대한 다항식을 곱한 것이므로 x의 홀수 제곱만 포함하고, 그 최고차는 x^{2k+1}이다. 따라서 $y = a_0x + a_1x^3 + \cdots + a_kx^{2k+1}$이다.

계수를 읽어 내기 위해 $j = k-m$으로 놓고 ($j = 0, \ldots, k$이다) $\binom{2k+1}{2k-2j} = \binom{2k+1}{2j+1}$을 이용하면

$$y = \sum_{j=0}^{k} \binom{2k+1}{2j+1} x^{2j+1}(x^2-1)^{k-j}.$$

첨자가 j인 항은 x^{2j+1}부터 시작한다. 따라서 x^{2r+1}은 $j \le r$인 항에서만 나오고, 그중 j번째 항에서는 $(x^2-1)^{k-j}$의 $(x^2)^{r-j}$ 항이 필요한데, 이는 $\binom{k-j}{r-j}(-1)^{k-r}$이다. 그러므로

$$a_r = (-1)^{k-r} \sum_{j=0}^{r} \binom{2k+1}{2j+1}\binom{k-j}{r-j}. \qquad (*)$$

a_0

$r = 0$이면 $j = 0$인 항만 기여한다.

$$a_0 = (-1)^k \binom{2k+1}{1} = (-1)^k(2k+1).$$

소문항 (i)

$r = 1$이면 $j = 0, 1$인 항이 기여한다.

$$\begin{aligned} a_1 &= (-1)^{k-1}\left[(2k+1)\binom{k}{1} + \binom{2k+1}{3}\right] = (-1)^{k-1}(2k+1)\left[k + \frac{2k(2k-1)}{6}\right] \\ &= (-1)^{k-1}(2k+1)\,k\,\frac{3+2k-1}{3} = (-1)^{k-1}\,\frac{2k(k+1)(2k+1)}{3}, \end{aligned}$$

이고, 이것이 보이려던 식이다.

소문항 (ii)

x^5이 나타나려면 $k \ge 2$이어야 한다. $r = 2$이면 $j = 0, 1, 2$인 항이 기여한다.

$$a_2 = (-1)^k\left[(2k+1)\binom{k}{2} + \binom{2k+1}{3}\binom{k-1}{1} + \binom{2k+1}{5}\right].$$

각 항에 인수 $(2k+1)k(k-1)$이 있으므로 이를 묶어 내면

$$\begin{aligned} a_2 &= (-1)^k(2k+1)k(k-1)\left[\frac{1}{2}+\frac{2k-1}{3}+\frac{(2k-1)(2k-3)}{30}\right] \\ &= (-1)^k(2k+1)k(k-1)\,\frac{15+(20k-10)+(4k^2-8k+3)}{30} \\ &= (-1)^k(2k+1)k(k-1)\,\frac{4(k+1)(k+2)}{30} = (-1)^k\,\frac{2(k-1)k(k+1)(k+2)(2k+1)}{15}. \end{aligned}$$

세 번째 항에는 $\binom{2k+1}{5} = \frac{(2k+1)(2k)(2k-1)(2k-2)(2k-3)}{120} = \frac{(2k+1)k(k-1)(2k-1)(2k-3)}{30}$을 이용했다.

생각해 보기 우리가 얻은 답에는 (ii)에 인쇄된 식에 없는 인수 $(k+1)$이 있다. 어느 쪽이 맞을까?

$k=2$로 확인해 보자. 이때 $x=\cosh\theta$에 대하여 $y=\cosh(5\theta)$이고, $\cosh 5\theta = 16x^5 - 20x^3 + 5x$이므로 $a_2 = 16$이다. 우리의 식은 $2\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5/15 = 16$을 준다. 인쇄된 식은 $2\cdot1\cdot2\cdot4\cdot5/15 = \frac{16}{3}$을 주는데, a_r는 정수이므로 이는 옳을 수 없다. 따라서 시험지에 오식이 있으며, 인수 $(k+1)$이 빠져 있다. 올바른 결과는 위에 보인 것이다.

계수의 합

다항식에 $x=1$을 대입한다. 항등식이 $x\geq 1$에서 성립하고 $x=1$도 허용되므로

$$\sum_{r=0}^{k} a_r = y(1) = \cosh(n\cosh^{-1}1) = \cosh 0 = 1.$$

검산

- $k=1$: $\cosh 3\theta = 4x^3 - 3x$이다. 공식은 $a_0=-3$, $a_1 = 2\cdot1\cdot2\cdot3/3 = 4$를 주고, $-3+4=1$이다.
- $k=3$: $\cosh 7\theta = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$이다. 공식은 $a_0=-7$, $a_1=56$, $a_2 = -2\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot7/15 = -112$를 주며, 계수의 합은 1이다.
- $k\leq 14$인 모든 경우에 대하여 컴퓨터로 $(*)$를 점화식(recurrence) $T_{m+1} = 2xT_m - T_{m-1}$과 대조해 확인했고, 임의의 $x\geq 1$에서 다항식의 값을 $\cosh(n\cosh^{-1}x)$와 비교했다.

흔한 실수

- x^{2r+1}이 전개식의 한 항이 아니라 여러 항에서 기여를 받는다는 사실을 잊는다.
- 부호 실수: a_r에 대한 모든 기여는 같은 부호 $(-1)^{k-r}$을 가지므로, 이를 먼저 묶어 낸다.

▶ 계산을 억지로 (ii)에 인쇄된 꼴로 맞추려 한다. $k = 2$ 같은 작은 경우를 확인해 보면 오식임을 알 수 있다.

STEP 너머

다항식 y는 체비쇼프(Chebyshev) 다항식 $T_n(x)$로, 보통 $T_n(\cos\phi) = \cos n\phi$로 정의한다. 우리가 다룬 쌍곡함수 버전은 $x \geq 1$에서의 같은 항등식이며, 다항식은 임의의 구간에서의 값으로 결정되므로 두 정의는 일치한다. 체비쇼프 다항식은 근사 이론(approximation theory)에서 핵심적인데, 최고차항의 계수가 1인 n차 다항식(monic polynomial) 가운데 $2^{1-n}T_n$이 $[-1,1]$에서 최댓값의 크기가 가장 작기 때문이다. 이 다항식은 수치해석(numerical analysis) 입문 강의라면 어디서든 다시 등장한다. 이런 종류의 계산을 STEP 스타일로 더 연습하려면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)를 풀어 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.