풀이

STEP III 1989, 문제 4

순수수학 • 곡선 그리기와 근

STEP III 1989, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/89-s3-q4

핵심 아이디어

분수식을 다항식(polynomial)과 진분수(proper fraction)의 합으로 나누면 기울어진 점근선(oblique asymptote)이 곧바로 드러나고, 도함수(derivative)를 구하기도 쉬워진다. 도함수는 모든 곳에서 2보다 크므로, 세 개의 가지(branch)는 각각 $-\infty$에서 $+\infty$까지 올라간다. 그러면 후반부의 각 방정식은 사실상 "곡선 = 더 간단한 곡선"의 꼴이다. 이제 각 가지에서 차의 강한 단조성(strict monotonicity)을 이용하면 교점의 개수를 정확히 셀 수 있다.

풀이

곡선

$2x(x^2-5) = 2x(x^2-4) - 2x$이므로

$$y = 2x - \frac{2x}{x^2-4}.$$

이 함수는 기함수(odd function)이므로, 곡선은 원점에 대하여 2차 회전대칭(rotational symmetry)을 가진다. 곡선은 $x(x^2-5) = 0$인 곳, 즉 $x = 0$과 $x = \pm\sqrt{5}$에서만 축과 만난다.

점근선. 분모는 $x = \pm 2$에서 0이 되고(이때 분자는 $\mp 4 \neq 0$이다), 따라서 $x = 2$와 $x = -2$는 수직점근선(vertical asymptote)이다. $|x| \to \infty$일 때 $\frac{2x}{x^2-4} \to 0$이므로 $y = 2x$는 기울어진 점근선이다. 또한 $y - 2x = -\frac{2x}{x^2-4}$는 x가 큰 양수일 때 음수이고, x가 큰 음수일 때 양수이다. 따라서 곡선은 오른쪽에서는 아래쪽에서, 왼쪽에서는 위쪽에서 $y = 2x$에 다가간다.

기울기. 나누어 놓은 꼴을 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2 - \frac{2(x^2-4) - 2x\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = 2 + \frac{2(x^2+4)}{(x^2-4)^2} > 2.$$

따라서 정류점(stationary point)은 없고, y는 구간 $x<-2$, $-2<x<2$, $x>2$ 각각에서 순증가한다. 한 번 더 미분하면 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -\dfrac{4x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$이므로, 변곡점(point of inflection)은 원점뿐이다.

원점에서의 접선. $x=0$에서 기울기는 $2+\frac{2\cdot 4}{16} = \frac{5}{2}$이므로, 그 점에서의 접선(tangent)은

$$y = \tfrac{5}{2}x.$$

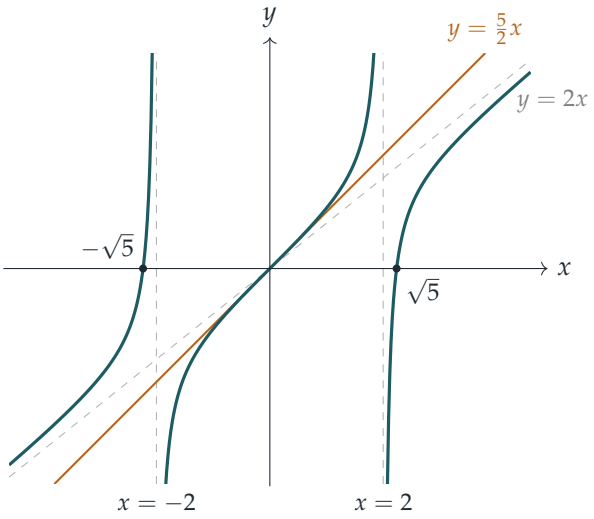
$x=\pm 2$ 근처에서의 모양. $x=2$ 근처에서는 항 $-\frac{2x}{x^2-4}$가 지배적이다. 이 항은 $x\to 2^+$일 때 $-\infty$로, $x\to 2^-$일 때 $+\infty$로 가고, 대칭성에 의해 $x\to -2^-$일 때 $+\infty$로, $x\to -2^+$일 때 $-\infty$로 간다. 따라서

- $x<-2$에서 y는 $-\infty$에서 $+\infty$까지 증가하며 $-\sqrt{5}$에서 축을 지난다.
- $-2<x<2$에서 y는 원점을 지나며 $-\infty$에서 $+\infty$까지 증가한다.
- $x>2$에서 y는 $-\infty$에서 $+\infty$까지 증가하며 $\sqrt{5}$에서 축을 지난다.

유용한 사실이 하나 더 있다. $0<x<2$일 때

$$y - \tfrac{5}{2}x = \frac{x\left[4(x^2-5) - 5(x^2-4)\right]}{2(x^2-4)} = \frac{-x^3}{2(x^2-4)} > 0,$$

이므로 이 구간에서 곡선은 원점에서의 접선보다 위에 있다(대칭성에 의해 $-2<x<0$에서는 아래에 있다).



소문항 (i)

$x = 0$(좌변 0, 우변 8)도 $x = \pm 2$(좌변 -16, 우변 0)도 근(root)이 아니다. 따라서 $2x(x^2 - 4)$로 나눌 수 있고, 방정식은

$$\frac{2x(x^2-5)}{x^2-4} = \frac{5x-2}{2x} = \frac{5}{2} - \frac{1}{x}.$$

이 된다. 그러므로 근은 곡선과 쌍곡선(hyperbola) $H\colon y = \frac{5}{2} - \frac{1}{x}$의 교점의 x좌표이다. 가지별로 살펴보자.

- $x < -2$: 여기서 H의 기울기는 $\frac{1}{x^2} < \frac{1}{4}$이고, 곡선의 기울기는 > 2이다. 따라서 차(곡선 $-$ H)는 순증가한다. H가 $\frac{5}{2}$와 3 사이에 머무르므로, 이 차는 $x \to -\infty$일 때 $-\infty$로, $x \to -2^-$일 때 $+\infty$로 간다. 근은 정확히 하나이다.
- $-2 < x < 0$: 곡선은 $y < 0$이지만(세 인수 x, $x^2 - 5$, $x^2 - 4$가 모두 음수이다), H는 $y > \frac{5}{2}$이다. 근이 없다.
- $0 < x < 2$: 앞의 사실에 의해 $y > \frac{5}{2}x$이다. 또한

  $$\tfrac{5}{2}x - \left(\tfrac{5}{2} - \tfrac{1}{x}\right) = \frac{5x^2 - 5x + 2}{2x} > 0,$$

  인데, $5x^2 - 5x + 2$의 판별식(discriminant)이 $25 - 40 < 0$이기 때문이다. 따라서 곡선은 H보다 엄격히 위에 있다. 근이 없다.
- $x > 2$: 첫 번째 경우와 마찬가지로 차는 순증가한다(기울기 $> 2 - \frac{1}{4}$). H가 2와 $\frac{5}{2}$ 사이에 머무르므로, 이 차는 $-\infty$에서 $+\infty$까지 간다. 근은 정확히 하나이다.

따라서 방정식 (i)은 정확히 **두 개**의 실근을 가지며, 하나는 -2보다 작고 하나는 2보다 크다.

> **생각해 보기** (ii)의 방정식은 양변에 제곱이 있는데, 어떻게 곡선에서 읽어 낼 수 있을까?

$(x^2 - 4)^2$으로 나눈다. 그러면 좌변은 y^2이 되므로, 방정식은 $y^2 = x^2 + 1$을 뜻한다.

소문항 (ii)

이번에도 $x = \pm 2$는 근이 아니다(좌변 16, 우변 0). 따라서 방정식은 $y^2 = x^2 + 1$이고, 여기서 y는 곡선의 세로좌표(ordinate)이다. 근은 곡선과 직각쌍곡선(rectangular hyperbola) $y^2 - x^2 = 1$의 두 가지 $y = \pm\sqrt{x^2+1}$의 교점이다.

위쪽 가지. $f(x) = y - \sqrt{x^2+1}$이라 하자. 그러면

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} > 2 - 1 > 0,$$

이므로 f는 세 구간 각각에서 순증가한다. 각 구간에서 y는 $-\infty$에서 $+\infty$까지 변하는 반면 $\sqrt{x^2+1}$은 유한하게 머문다($x \to +\infty$일 때 $2x$에 비해 $|x|$ 정도로만 커지고, $x \to -\infty$일 때는 f의 두 항이 모두 음수이다). 따라서 f는 $-\infty$에서 $+\infty$까지 가고, 각 구간에 근이 정확히 하나씩, 모두 세 개 있다.

아래쪽 가지. 사상 $(x,y) \mapsto (-x,-y)$는 곡선을 자기 자신으로, 아래쪽 가지를 위쪽 가지로 보낸다. 따라서 아래쪽 가지와의 교점도 정확히 세 개이다.

두 근의 집합은 겹치지 않는다. 공통인 x에서 곡선은 하나의 y값만 가지며, 이 값이 양수이면서 동시에 음수일 수는 없기 때문이다. 따라서 방정식 (ii)는 정확히 **여섯 개**의 실근을 가진다. (검산하자면, 이 방정식은 차수(degree)가 6인 다항식 $3x^6 - 33x^4 + 92x^2 - 16 = 0$이므로, 근이 모두 실수이다.)

> **?** **생각해 보기** (iii)의 변수는 x가 아니라 z이고, z는 음수일 수도 있다. 곡선을 어떻게 끌어들일까?

$z > 0$이면 $x > 0$으로 $z = x^2$이라 놓는다. $z \le 0$인 경우는 따로 직접 다룬다.

소문항 (iii)

좌변은 결코 음수가 아니므로, 근은 $z+1 \ge 0$, 즉 $z \ge -1$을 만족해야 한다. 또한 $z = 0$은 근이 아니고(좌변 0, 우변 16), $z = 4$도 근이 아니다(좌변 64, 우변 0).

$z > 0$인 근. $x > 0$으로 $z = x^2$이라 놓으면, 각 양의 근 z는 정확히 하나의 $x > 0$에 대응한다. 방정식은 $4x^4(x^2-5)^2 = (x^2-4)^2(x^2+1)$이 된다. $x^2(x^2-4)^2$으로 나누면

$$y^2 = 1 + \frac{1}{x^2}, \qquad \text{즉} \qquad y = \pm s(x), \quad s(x) = \sqrt{1+x^{-2}}.$$

여기서 s는 $+\infty$($x \to 0^+$일 때)에서 1($x \to \infty$일 때)까지 감소하고, $s'(x) = -\dfrac{1}{x^3\sqrt{1+x^{-2}}}$이므로 $|s'(x)| < \frac{1}{x^3}$이다.

- $y = s(x)$: 함수 $y - s$의 도함수는 $y' - s' > 2$이다. $(0,2)$에서 이 함수는 $-\infty$($y \to 0$이고 $s \to \infty$이므로)에서 $+\infty$까지 변한다. $(2,\infty)$에서도 $-\infty$에서 $+\infty$까지 변한다. 각 구간에 근이 하나씩, 따라서 근은 두 개이다.
- $(0,2)$에서 $y = -s(x)$: 그곳에서 곡선은 $y > 0 > -s$이다. 근이 없다.
- $(2,\infty)$에서 $y = -s(x)$: 함수 $y + s$의 도함수는 $y' + s' > 2 - \frac{1}{8} > 0$이고, 이 함수는 $-\infty$에서 $+\infty$까지 변한다. 근은 하나이다.

따라서 양의 근 z는 정확히 세 개이다.

$-1 \le z < 0$인 근. $0 < t \le 1$로 $z = -t$라 쓰자. 방정식은

$$4t^2(t+5)^2 = (t+4)^2(1-t).$$

이 된다. $(0,1]$에서 좌변은 0($t \to 0$일 때)에서 144까지 순증가한다. 우변은 16에서 0까지 순감소한다. 두 변의 차는 순증가하고 부호가 바뀌므로, 근은 정확히 하나이다.

그러므로 방정식 (iii)은 정확히 **네 개**의 실근을 가진다. 세 개는 양수이고 하나는 $(-1,0)$에 있다. 전개하면 사차방정식(quartic) $4z^4 - 41z^3 + 107z^2 - 8z - 16 = 0$이므로, 네 근이 모두 실수이다.

검산

- $x = 1000$에서 $y - 2x \approx -0.002$이므로, 곡선이 아래쪽에서 $y = 2x$에 다가감을 확인할 수 있다.
- 수치적으로 (i)의 근은 $x \approx -2.143$과 2.401로, 예상대로 바깥쪽 두 가지에 하나씩 있다.
- (ii)의 근은 $x \approx \pm 0.431$, ± 2.155, ± 2.484로, 쌍곡선의 각 가지마다 곡선의 가지 하나에 하나씩 있다.
- (iii)의 근은 $z \approx -0.332$, 0.473, 4.799, 5.310이다. 마지막 세 근은 $x = \sqrt{z} \approx 0.688$, 2.191, 2.304를 주고, 이때 곡선의 값은 $y \approx 1.77$, -1.10, 1.09로 경우 분석과 일치한다.

흔한 실수

- $x = 0$과 $x = \pm 2$가 근이 아님을 먼저 확인하지 않고 x나 $x^2 - 4$로 나누는 것.
- (ii)에서 $y = +\sqrt{x^2+1}$과의 교점만 세고 아래쪽 가지를 잊어, 6 대신 3을 답하는 것.
- (iii)에서 $z = x^2$을 대입하면서 z가 음수일 수 있음을 잊어, $(-1,0)$에 있는 근을 놓치는 것.

STEP 너머

여기서 사용한 개수 세기 논증은 중간값 정리(intermediate value theorem, 부호가 바뀌는 연속함수는 영점을 가진다)와 강한 단조성(영점을 많아야 하나 가진다)에 기대고 있다. 이 두 사실을 엄밀하게 만드는 것은 대학 해석학(analysis) 강의의 첫 과제 가운데 하나이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 두 가지를 모두 꼼꼼하고 읽기 쉽게 다룬다. 데카르트(Descartes)의 부호 법칙과 슈투름(Sturm) 열은 다항식의 실근의 개수를 세는 대수적 방법으로, 여기서 사용한 기하적 방법과 비교해 보면 흥미롭다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.