풀이

STEP III 1989, 문제 2

순수수학 • 3차원 공간의 평면

> **STEP III 1989, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/89-s3-q2

핵심 아이디어

좌표(coordinates)를 동쪽, 북쪽, 위쪽 방향으로 잡는다. 그러면 각 평면(plane)은 그래프 $z = px + qy + r$로 나타나고, 세 점이 주어지면 평면 하나가 정해진다. 평면이 얼마나 가파른지는 z가 수평 방향으로 얼마나 빠르게 변하는지에만 달려 있으므로, 각도는 p와 q로부터 구할 수 있다. 두 번째 부분에는 깔끔한 지름길이 있다. 지표면 아래 광층(seam)의 **깊이** 역시 위치에 대한 일차함수(linear function)이고, 광층은 바로 그 깊이가 0인 곳에서 지표면에 드러난다.

풀이

설정하기

A를 원점으로 하고, x축은 동쪽, y축은 북쪽, z축은 연직 위쪽을 향하도록 잡는다(길이의 단위는 모두 미터). 그러면

$$A = (0, 0, 0), \qquad B = (0, 100, -5), \qquad C = (60, 100, -10),$$

이다. B는 A보다 $5\,\mathrm{m}$ 아래에 있고, C는 B보다 다시 $5\,\mathrm{m}$ 아래에 있기 때문이다. 시추공(bore-hole)은 연직이므로, 시추공이 광층과 만나는 점은 이 점들의 바로 아래에 있다.

$$A' = (0, 0, -95), \qquad B' = (0, 100, -50), \qquad C' = (60, 100, -86).$$

광층의 기울기

A', B', C'는 평면도에서 한 직선 위에 있지 않은(collinear가 아닌) 세 점의 위쪽에 놓이므로, 광층은 연직이 아니다. 따라서 광층을 $z = px + qy + r$로 쓸 수 있다.

- A'에서: $r = -95$.
- A'에서 B'로 갈 때 y는 100, z는 45만큼 증가하므로 $100q = 45$이고 $q = \frac{9}{20}$이다.
- B'에서 C'로 갈 때 x는 60만큼 증가하고 z는 -36만큼 변하므로 $60p = -36$이고 $p = -\frac{3}{5}$이다.

따라서 광층은

$$z = -\tfrac{3}{5}x + \tfrac{9}{20}y - 95,$$

이고, 이 평면의 법선벡터(normal vector)는 $\mathbf{n} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{9}{20}, 1\right)$, 또는 20배 하여 $(12, -9, 20)$이다.

두 평면이 이루는 각은 두 법선벡터가 이루는 각과 같다. 수평면의 법선벡터는 $\mathbf{k} = (0,0,1)$이므로, 광층이 수평면과 이루는 각 θ는

$$\cos\theta = \frac{|(12,-9,20)\cdot(0,0,1)|}{\sqrt{12^2+9^2+20^2}} = \frac{20}{\sqrt{144+81+400}} = \frac{20}{\sqrt{625}} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}.$$

를 만족한다. 따라서 요구한 대로 광층은 수평면에 대하여 $\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$만큼 기울어져 있다.

(다른 방법으로 볼 수도 있다. 최대경사선(line of greatest slope)을 따라가면 수평으로 1미터마다 z가 $\sqrt{p^2+q^2} = \sqrt{\frac{9}{25}+\frac{81}{400}} = \frac{3}{4}$만큼 변한다. 따라서 $\tan\theta = \frac{3}{4}$로 3–4–5 삼각형이 되고, $\cos\theta = \frac{4}{5}$이다.)

광층이 지표면에 드러나는 곳

지표면은 원점을 지나는 평면이다. 앞에서와 같은 방법으로, A에서 B로 북쪽으로 가면 100당 5만큼 낮아지고, B에서 C로 동쪽으로 가면 60당 5만큼 낮아지므로

$$z = -\tfrac{1}{12}x - \tfrac{1}{20}y.$$

이다.

> **생각해 보기** 두 평면의 방정식을 정말 연립하여 풀어야 할까?

꼭 그렇지는 않다. 수평 위치가 (x,y)인 점에서 지표면 아래 광층의 깊이를 $d(x,y)$라 하자. 이는 두 일차함수의 차이므로 그 자체로 일차함수이다.

$$d(x,y) = \left(-\tfrac{1}{12}x - \tfrac{1}{20}y\right) - \left(-\tfrac{3}{5}x + \tfrac{9}{20}y - 95\right) = \tfrac{31}{60}x - \tfrac{1}{2}y + 95.$$

검산해 보면 $d(0,0) = 95$, $d(0,100) = 45$, $d(60,100) = 45 + 31 = 76$으로, 세 시추공의 깊이와 일치한다. (사실 이 값들로부터 d를 바로 쓸 수도 있었다. 깊이는 북쪽으로 100 m 가면 50만큼 줄고, 동쪽으로 60 m 가면 31만큼 는다.)

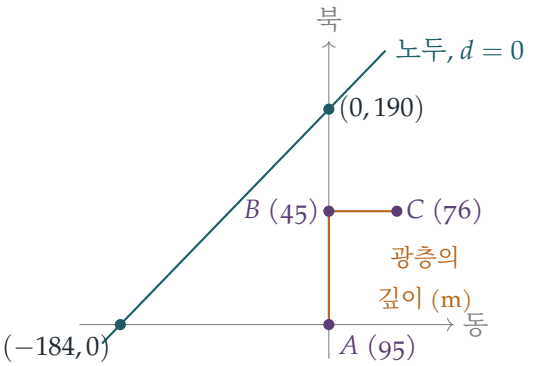
광층은 $d = 0$인 곳에서 지표면에 드러나며, 이는 평면도에서 직선

$$\tfrac{31}{60}x - \tfrac{1}{2}y + 95 = 0, \qquad \text{즉,} \qquad y = \tfrac{31}{30}x + 190.$$

이다. 이 직선을 따라 동쪽으로 30 m 움직이면 북쪽으로 31 m 움직인다. 따라서 이 직선이 정북 방향과 이루는 각 φ는

$$\tan\varphi = \frac{\text{동쪽}}{\text{북쪽}} = \frac{30}{31}, \qquad \varphi = \tan^{-1}\left(\tfrac{30}{31}\right) \approx 44.06^\circ.$$

를 만족한다. 그러므로 이 직선의 방위각(bearing)은 $\tan^{-1}\left(\frac{30}{31}\right) \approx 044^\circ$이다. 반대 방향으로 읽으면 224°이다. 직선은 두 방위각을 모두 가지며, 어느 쪽으로 나타내도 된다. 이 직선은 북동쪽보다 약간 서쪽으로 뻗어 있고, 평면도에서 A의 정북 방향 190 m 지점을 지난다.



검산

- 광층의 법선벡터 $(12, -9, 20)$의 길이는 정확히 25이므로 $\cos\theta = \frac{20}{25}$로, 문제에서 예고한 대로 깔끔한 3–4–5 답이 나온다.
- 깊이 공식 d가 세 시추공의 깊이를 모두 재현하므로, 두 평면 모두 옳다.
- 수치로 계산하면 $\tan^{-1}(30/31) = 44.0608^\circ$이다. 직선 $y = \frac{31}{30}x + 190$ 위의 임의의 점들은 반올림 오차 범위에서 두 평면 위의 높이가 같다.

흔한 실수

- 각 시추공 꼭대기로부터의 깊이를, 꼭대기들의 높이가 같은 것처럼 사용하는 실수. B와 C는 A보다 각각 5 m, 10 m 낮으므로, 그 지점에서 광층은 A의 높이보다 45 m와 76 m가 아니라 50 m와 86 m 아래에 있다.
- 노두(outcrop) 대신 광층 안의 수평선($-\frac{3}{5}x + \frac{9}{20}y$가 일정한 직선, 방위각 $\tan^{-1}\frac{3}{4} \approx 037^\circ$)의 방위각을 답하는 실수. 지표면도 기울어져 있으므로 이 둘은 다르다.
- $\tan\varphi =$ 동쪽/북쪽을 북쪽/동쪽과 혼동하는 실수. 방위각은 북쪽에서 시계 방향으로 잰다.

STEP 너머

이것은 지질학자들이 다루는 "주향과 경사(strike and dip)" 문제이며, 사용하는 도구는 대학 1학년 벡터 기하학의 것이다. 즉 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = c$ 꼴의 평면, 법선벡터를 이용한 두 평면 사이의 각, 그리고 교선(line of intersection)이다. 깊이를 이용한 요령은 일반적인 원리의 한 예이다. 두 아핀 함수(affine function)의 차는 아핀 함수이므로, 평행하지 않은 두 평면의 교선은 하나의 일차함수의 영점 집합(zero set)이다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 이러한 관점을 일차방정식의 기하학 속에 녹여 낸다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.