풀이

STEP III 1989, 문제 16

확률과 통계 • 확률과 가설검정

STEP III 1989, 16번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/89-s3-q16

핵심 아이디어

세 가지 예/아니오 특성은 인구 전체를 여덟 개의 칸(cell)으로 나누고, 여덟 개의 진술은 그 칸들에 속하는 비율에 대한 일차방정식일 뿐이다. 먼저 녹색 눈 칸들을 채우고(그곳의 조건이 가장 구체적이다), 다음으로 담갈색 눈 칸들을 채운다. 그러면 통계 부분은 단 하나의 수, 즉 루리타니아 사람이 좁은 머리형일 확률(probability)에 달려 있게 되고, 그 값 아래에서 관측 결과가 놀라운 것인지를 묻는 문제가 된다.

풀이

인쇄된 시험지에는 세 군데의 오기가 있다. (iv)의 "arrow-headed"는 *narrow-headed*(좁은 머리형)로, (vi)의 "fair-headed"는 *fair-haired*(금발)로, (viii)의 "hazel-haired"는 *hazel-eyed*(담갈색 눈)로 읽는다. 세 가지 특성이 머리카락(금발 또는 흑발), 눈(녹색 또는 담갈색), 머리 모양(좁은 머리형 또는 넓은 머리형)이므로, 이것만이 말이 되는 해석이다.

좁은 머리형의 비율

루리타니아 사람 한 명을 임의로 고른다. 금발과 흑발을 F, D로, 녹색 눈과 담갈색 눈을 G, H로, 좁은 머리형과 넓은 머리형을 N, B로 나타낸다. 주어진 조건은 $\mathrm{P}(F) = \frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(G) = \frac{1}{5}$이다.

녹색 눈 칸. (v)에 의해 $\mathrm{P}(N \mid G) = \mathrm{P}(B \mid G) = \frac{1}{2}$이므로

$$\mathrm{P}(G \cap N) = \mathrm{P}(G \cap B) = \frac{1}{10}.$$

(vi)에 의해 녹색 눈의 넓은 머리형은 금발과 흑발로 똑같이 나뉜다.

$$\mathrm{P}(F \cap G \cap B) = \mathrm{P}(D \cap G \cap B) = \frac{1}{20}.$$

(iv)에 의해 $\mathrm{P}(F \cap G \cap N) = 0$이므로 $\mathrm{P}(D \cap G \cap N) = \frac{1}{10}$이다.

담갈색 눈 칸. 다음과 같이 놓는다.

$$a = \mathrm{P}(F \cap H \cap B), \quad b = \mathrm{P}(F \cap H \cap N), \quad c = \mathrm{P}(D \cap H \cap B), \quad d = \mathrm{P}(D \cap H \cap N).$$

- 금발: 녹색 눈의 금발은 $0 + \frac{1}{20}$을 차지하므로 $a + b = \frac{1}{4} - \frac{1}{20} = \frac{1}{5}$이다.
- 담갈색 눈: $a + b + c + d = \frac{4}{5}$이므로 $c + d = \frac{3}{5}$이다.
- 진술 (vii): $\mathrm{P}(B \cap D) = \frac{1}{20} + c = \frac{1}{2}$이므로 $c = \frac{9}{20}$이고, 따라서 $d = \frac{3}{20}$이다.
- 진술 (viii): $\mathrm{P}(F \cap B \mid H) = \mathrm{P}(D \cap N \mid H)$이다. 양변에 $\mathrm{P}(H)$를 곱하면 $a = d = \frac{3}{20}$이고, 따라서 $b = \frac{1}{20}$이다.

여덟 개의 비율을 모두 20분의 몇으로 나타내면 다음과 같다.

	$G \cap N$	$G \cap B$	$H \cap N$	$H \cap B$
F	0	1	1	3
D	2	1	3	9

모두 음이 아니고 합이 20이므로 이 모형은 모순이 없다. 좁은 머리형 열들을 더하면

$$\mathrm{P}(N) = \frac{0+2+1+3}{20} = \frac{3}{10}.$$

즉 이 모형에 따르면 루리타니아 사람의 30%가 좁은 머리형이다.

넓은 머리형인 지인 여섯 명

내 지인 여섯 명이 서로 독립(independent)인 임의표본(random sample)이라면, 여섯 명 모두가 넓은 머리형일 확률은

$$\left(\tfrac{7}{10}\right)^6 = 0.1176\ldots \approx 0.12.$$

? 생각해 보기 12%의 확률로 일어나는 사건이 이 모형에 반하는 좋은 증거가 될까?

그렇지 않다. 확률이 대략 8분의 1인 일은 드문 일이 아니며, 5%와 같은 통상적인 어떤 유의수준(significance level)에서도 유의하지 않다. 이 자료는 또 다른 면에서도 약하다. 지인들은 임의표본이 아니다. 같은 가족, 지역, 사회 집단에 속할 수 있으므로 서로 독립이라고 할 수 없고, 인구 전체를 대표한다고 할 수도 없다. 이 관측은 기껏해야 아주 약간의 의심을 불러일으킬 뿐이다.

크기 200인 임의표본

크기 200인 임의표본에 포함된 좁은 머리형의 수를 X라 하자. 인구가 크므로 각 추출은 사실상 독립이고, 모형 아래에서 $X \sim \mathrm{B}(200, \frac{3}{10})$이다. 이때

$$\mathrm{E}(X) = 60, \qquad \mathrm{Var}(X) = 200 \times 0.3 \times 0.7 = 42, \qquad \sqrt{42} \approx 6.481.$$

np와 $n(1-p)$가 모두 크므로 정규 근사(normal approximation) $X \approx \mathrm{N}(60, 42)$를 연속성 수정(continuity correction)과 함께 사용한다.

$$\mathrm{P}(X \le 50) \approx \Phi\left(\frac{50.5 - 60}{\sqrt{42}}\right) = \Phi(-1.466) \approx 0.071.$$

따라서 모형 아래에서 좁은 머리형이 50명 이하일 확률은 약 7%이다.

생각해 보기 이제 이 모형을 기각해야 할까?

5% 수준에서는 아니다. $p = 0.3$ 대 $p < 0.3$의 단측 검정(one-tailed test)을 하면 p-값(p-value)은 약 0.07이다. 하지만 이 결과는 모형에 어느 정도 의심을 던진다. 표본 비율 $\frac{50}{200} = 0.25$는 예측값보다 약 1.5 표준편차만큼 낮다. 또한 이는 예상보다 좁은 머리형이 적었던 내 지인들의 경우와 같은 방향을 가리킨다. 모형이 제시하는 30%라는 수치를 믿기 전에 자료를 더 모으는 것이 현명할 것이다. (양측 검정이라면 p-값은 약 0.14가 되어 증거는 더욱 약해진다.)

검산

- 여덟 개의 조건은 모두 표에서 바로 읽어 낼 수 있다. 예를 들어 (vii): $1 + 9 = 10$개의 20분의 $1 = \frac{1}{2}$.
- 컴퓨터로 확인하면 칸의 비율이 유일한 해이고, $\mathrm{P}(N) = \frac{3}{10}$이며, $(0.7)^6 = 0.117649$임이 확인된다. 정확한 이항 확률 $\mathrm{P}(X \le 50) = 0.0695$는 정규 근사값 0.0713에 가깝다.

흔한 실수

- (v)나 (vi)를 조건부 진술이 아니라 인구 전체에 대한 진술로 읽는 것. 녹색 눈 집단 안에서 "같은 정도로 가능하다"는 것은 $\frac{1}{5}$을 똑같이 반으로 나눈다는 뜻이다.
- 연속성 수정을 잊는 것. 50.5 대신 50을 쓰면 $\Phi(-1.543) \approx 0.061$이 된다.
- 아무 언급 없이 지인들을 임의표본으로 취급하는 것.

STEP 너머

마지막 부분은 가설 검정(hypothesis test)이며, 두 가지 증거는 자연스러운 질문을 하나 던진다. 여러 개의 약한 증거를 어떻게 결합해야 할까? 대학 통계학은 이 질문에 우도(likelihood)로 답하며(베이즈주의자라면 사후 확률(posterior probability)로 답한다), 이는 각 p의 값이 **모든** 자료를 함께 얼마나 잘 설명하는지를 잰다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 확률론의 배경 지식을 제공하고, Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률 입문)는 베이즈 관점을 쉽게 설명한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.