풀이

STEP III 1989, 문제 14

역학 • 도르래와 충격량

STEP III 1989, 14번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/89-s3-q14

핵심 아이디어

소문항 (i)에서는 원판을 얇은 고리들로 자른다. 각 고리는 모든 질량이 중심에서 같은 거리에 있으므로, 질량과 관성 모멘트(moment of inertia) 모두 r에 대한 하나의 적분으로 나타난다. 소문항 (ii)에서는 전체 계의 자유도(degree of freedom)가 하나(D의 깊이)뿐이므로, 운동 방정식(equation of motion) 하나로 가속도를 구할 수 있다. B가 갑자기 멈추면, 줄의 구속 조건(constraint)으로부터 그 뒤에 D가 얼마나 빠르게 움직일 수 있는지 바로 알 수 있고, 충격량(impulse)은 단지 운동량(momentum)의 변화일 뿐이다.

풀이

소문항 (i)

(소문항 (i)의 축은 중심 O를 지나는 축이다. 시험지의 "C"는 오식이다.) O로부터 거리 r인 곳의 밀도(density)를 $\rho = kr$라 하자. 여기서 k는 상수이다. 반지름 r와 $r + \mathrm{d}r$ 사이의 얇은 고리는 넓이가 $2\pi r\,\mathrm{d}r$이므로 질량은 $2\pi kr^2\,\mathrm{d}r$이고, 그 위의 모든 점은 축으로부터 거리 r에 있다. 따라서

$$m = \int_0^a 2\pi kr^2\,\mathrm{d}r = \frac{2\pi ka^3}{3}, \qquad I = \int_0^a r^2 \cdot 2\pi kr^2\,\mathrm{d}r = \frac{2\pi ka^5}{5}.$$

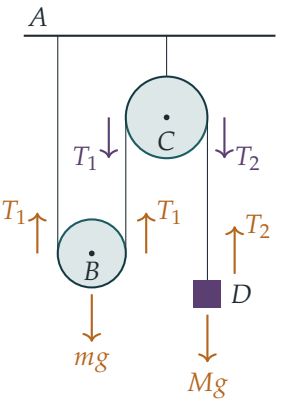
두 식을 나누면 $I/m = \frac{3}{5}a^2$이므로

$$I = \tfrac{3}{5}ma^2$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. (이 값은 균일한 원판의 $\frac{1}{2}ma^2$보다 크며, 그래야 마땅하다. 질량이 가장자리 근처에 더 많이 몰려 있기 때문이다.)

소문항 (ii): B가 멈추기 전의 운동

모형: B는 질량 m인 매끄러운 도르래(pulley)이고, C는 (i)과 같은 종류의 원판으로 질량이 m, 반지름이 a이므로 고정된 축에 대한 관성 모멘트는 $\frac{3}{5}ma^2$이다. 줄은 가볍고 늘어나지 않으며 C 위에서 미끄러지지 않는다. B가 매끄러우므로 장력(tension) T_1은 두 줄 부분 AB와 BC에서 같다. 줄 부분 CD의 장력을 T_2라 하자. C는 거칠므로 T_2가 T_1과 같을 필요는 없다.



D가 가속도 f로 아래로 움직인다고 하자. B를 받치는 두 줄 부분은 각각 CD가 늘어나는 양의 절반만큼 짧아지므로, B는 가속도 $\frac{1}{2}f$로 올라간다. 또 줄이 C 위에서 미끄러지지 않으므로 C의 각가속도(angular acceleration)는 f/a이다. 운동 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} D\text{ (아래 방향)}: &\quad Mg - T_2 = Mf, \\ B\text{ (위 방향)}: &\quad 2T_1 - mg = \tfrac{1}{2}mf, \\ C\text{ (축에 대한 모멘트)}: &\quad (T_2 - T_1)a = \tfrac{3}{5}ma^2 \cdot \frac{f}{a}. \end{aligned}$$

마지막 식에 $T_2 = Mg - Mf$와 $T_1 = \frac{1}{2}mg + \frac{1}{4}mf$를 대입하면

$$Mg - Mf - \tfrac{1}{2}mg - \tfrac{1}{4}mf = \tfrac{3}{5}mf \quad\Longrightarrow\quad f\left(M + \tfrac{17}{20}m\right) = g\left(M - \tfrac{1}{2}m\right),$$

이므로

$$f = \frac{10(2M - m)g}{20M + 17m}.$$

이 값은 상수이고, 양수가 되는 것은 정확히 $m < 2M$이기 때문이다. 바로 그래서 이 조건이 주어져 있다. 이로써 D가 정지 상태에서 실제로 내려간다는 것을 알 수 있다. 따라서 t초 뒤에 D는 속력

$$v = ft = \frac{10(2M - m)gt}{20M + 17m}$$

로 아래로 움직이고, B는 $\frac{1}{2}v$로 올라가며, C는 각속력 v/a로 회전한다.

(에너지로 검산해도 같은 f를 얻는다. D가 x만큼 떨어졌을 때 운동 에너지는 $\frac{1}{2}(M + \frac{1}{4}m + \frac{3}{5}m)\dot{x}^2$이고, 잃은 위치 에너지는 $(M - \frac{1}{2}m)gx$이다.)

소문항 (ii): 충격량

생각해 보기 B가 멈춘 뒤에도 D가 계속 움직일 수 있을까?

줄이 팽팽한 동안 D의 속력은 언제나 B의 속력의 두 배이다. A가 고정되어 있고 AB와 BC의 길이가 각각 같은 양만큼 변하기 때문이다. B가 정지하면 이 두 길이가 모두 고정되므로 줄이 C를 돌아 지나갈 수 없고, 따라서 D도 멈추어야 하며 C도 마찬가지이다. 줄은 실제로 팽팽한 상태를 유지한다. D는 C로부터 멀어지고 있으므로 CD를 팽팽하게 당기고, 여전히 회전하고 있는 C는 BC 쪽에서 줄을 끌어올리므로 그 부분도 팽팽하게 당겨진다. (실제로 충격 장력을 계산하면 CD에서 Mv, BC에서 $(M+\frac{3}{5}m)v$로 둘 다 양수가 나오며, 이것이 위의 사실을 확인해 준다.)

따라서 D의 속도는 아래 방향 v에서 0으로 떨어지고, (줄이) D에 가하는 충격량은 운동량의 변화와 같다.

$$\text{충격량} D = Mv = \frac{10M(2M-m)gt}{20M+17m} \quad \text{연직 위 방향.}$$

검산

- $m \to 0$(가벼운 도르래)이면 $f \to g$이고 충격량은 Mgt이다. 예상대로 D는 그냥 자유 낙하한다.
- $m = 2M$이면 충격량은 0이다. 계가 평형 상태에 있어서 전혀 움직이기 시작하지 않는다.
- $M = 3$, $m = 2.5$, $g = 9.8$, $t = 1.3$으로 운동을 수치적으로 단계별 계산하면 $Mv \approx 13.0507$을 얻어 공식과 일치하며, 얻은 운동 에너지는 잃은 위치 에너지와 일치한다. 수치 적분으로 구한 관성 모멘트의 비는 0.6000이다.

흔한 실수

- C의 양쪽 장력을 같다고 놓는 것. 도르래 C는 질량이 있고 거칠기 때문에, 바로 그 장력의 차이가 도르래를 회전시킨다.
- B가 D의 절반 속력으로 움직인다는 것을 잊는 것. 이 때문에 유효 질량(effective mass)에는 m이 아니라 $\frac{1}{4}m$이 들어간다.
- 충격량의 방향을 빠뜨리는 것. 충격량은 D에 위 방향으로 작용한다.

STEP 너머

운동 에너지를 하나의 좌표로 $\frac{1}{2}M_{\text{eff}}\dot{x}^2$처럼 쓰는 것은 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)의 출발점이다. 라그랑주 역학에서는 도르래의 기하 같은 구속 조건이 처음부터 식에 반영되어 있어서 장력이 전혀 나타나지 않는다. B를 멈추는 것과 같은 갑작스러운 구속 조건도 충격 방정식을 써서 같은 방식으로 다룬다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 강체(rigid body)의 회전과 충격량을 이런 방식으로 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.