풀이

STEP III 1989, 문제 13

역학 • 단순 조화 운동

STEP III 1989, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/89-s3-q13

핵심 아이디어

각 줄은 (탁자 아래의) O에서 출발하여 구멍을 지나 위로 올라온 뒤 탁자 위를 가로질러 P까지 이어진다. 탁자 아래에 있는 부분의 길이는 언제나 정확히 자연 길이(natural length) a이므로, 각 줄의 늘어난 길이(extension)는 단순히 P에서 그 줄의 구멍까지의 거리이다. 따라서 각 장력(tension)은 어떤 벡터에 비례하게 되고, 위치 벡터(position vector)를 쓰면 다섯 힘을 한 줄로 더할 수 있다. 다섯 구멍이 대칭적으로 놓여 있어서 그 위치 벡터들의 합이 영벡터이기 때문이다.

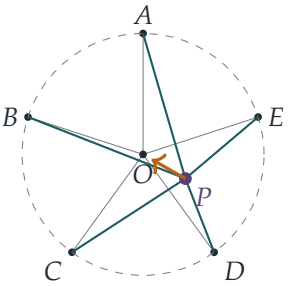
풀이

설정

P를 매끄러운 탁자 위의 입자로, 줄들을 가벼운 탄성 줄로, 구멍들을 매끄러운 것으로 모형화한다. 그러면 장력은 각 줄의 어느 곳에서나 같다. 탁자 위에서 O를 원점으로 잡고, P의 위치 벡터를 $\mathbf{r}$, $A, \ldots, E$의 위치 벡터를 각각 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_5$라 하자. 이들의 길이는 모두 a이다.

구멍 i를 지나는 줄은 (탁자 아래, 중심의 바로 밑에 있는) O에서 구멍까지 이어지는 길이 a의 수직 부분과, 탁자 위에 있는 길이 $|\mathbf{a}_i - \mathbf{r}|$의 부분으로 이루어진다. 전체 길이는 $a + |\mathbf{a}_i - \mathbf{r}|$이므로 늘어난 길이는 $|\mathbf{a}_i - \mathbf{r}|$이다. 이 값은 결코 음수가 아니므로, P가 어디에 있든 모든 줄은 팽팽하다(P가 구멍에 있을 때는 겨우 느슨해지기 직전이다). 즉 어떤 줄도 느슨해져서 방정식이 바뀌는 일은 없다. 훅의 법칙(Hooke's law)에 의해 장력은 $\frac{\lambda}{a}|\mathbf{a}_i - \mathbf{r}|$이고, 탁자 위에서 이 장력은 P를 구멍 쪽으로, 즉 단위 벡터 $\frac{\mathbf{a}_i - \mathbf{r}}{|\mathbf{a}_i - \mathbf{r}|}$의 방향으로 당긴다. 따라서 줄 i가 P에 작용하는 힘은

$$\frac{\lambda}{a}|\mathbf{a}_i - \mathbf{r}| \cdot \frac{\mathbf{a}_i - \mathbf{r}}{|\mathbf{a}_i - \mathbf{r}|} = \frac{\lambda}{a}(\mathbf{a}_i - \mathbf{r}).$$



청록색 선은 위에서 내려다본 탁자 위의 다섯 줄이다. 호박색 화살표는 P에 작용하는 합력(resultant force)을 나타내며, 이 힘은 곧장 O를 향한다.

첫 번째 부분

P에 작용하는 수직 방향의 힘(무게와 수직항력)은 서로 상쇄된다. 다섯 개의 수평 방향 힘을 더하면

$$\mathbf{F} = \frac{\lambda}{a}\sum_{i=1}^{5}(\mathbf{a}_i - \mathbf{r}) = \frac{\lambda}{a}\Big(\sum_{i=1}^{5}\mathbf{a}_i\Big) - \frac{5\lambda}{a}\mathbf{r}.$$

생각해 보기 왜 $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_5 = \mathbf{0}$일까?

그림 전체를 O를 중심으로 72° 회전하면 다섯 구멍의 자리가 서로 바뀔 뿐이므로, 합 $\mathbf{s} = \sum \mathbf{a}_i$는 변하지 않는다. 그런데 72° 회전으로 변하지 않는 벡터는 영벡터뿐이므로 $\mathbf{s} = \mathbf{0}$이다. (같은 말로, 1의 다섯제곱근(fifth roots of unity)의 합은 0이다.)

따라서 뉴턴(Newton)의 제2법칙에 의해

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{5\lambda}{a}\mathbf{r}, \qquad \text{즉} \qquad \ddot{\mathbf{r}} = -\omega^2\mathbf{r} \quad \text{단,} \quad \omega^2 = \frac{5\lambda}{am}.$$

P는 F에서 정지 상태로 출발하므로 $\mathbf{r}(0) = \overrightarrow{OF}$이고 $\dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{0}$이다. 해는 $\mathbf{r} = \cos(\omega t)\,\overrightarrow{OF}$이므로, P는 직선 FO를 따라 (O에 대한 F의 대칭점까지 갔다가 돌아오며) 왕복 운동하고, O로부터의 변위는 단진동(simple harmonic motion) 방정식을 만족한다. 주기(period)는

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{am}{5\lambda}},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. (이 결과는 작은 변위에서만이 아니라 **임의의** 출발점 F에 대해 성립한다는 점에 주목하자. 힘의 법칙이 정확히 선형이기 때문이다.)

마지막 부분

이제 줄 PAO의 탄성 계수(modulus of elasticity)가 $k\lambda$이므로, 이 줄이 P에 작용하는 힘은 $\frac{k\lambda}{a}(\mathbf{a}_1 - \mathbf{r})$이다. $\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_5 = -\mathbf{a}_1$을 이용하면

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \frac{k\lambda}{a}(\mathbf{a}_1 - \mathbf{r}) + \frac{\lambda}{a}\sum_{i=2}^{5}(\mathbf{a}_i - \mathbf{r}) \\ &= \frac{k\lambda}{a}(\mathbf{a}_1 - \mathbf{r}) + \frac{\lambda}{a}(-\mathbf{a}_1 - 4\mathbf{r}) \\ &= \frac{\lambda}{a}[(k-1)\mathbf{a}_1 - (k+4)\mathbf{r}] = -\frac{(k+4)\lambda}{a}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \qquad \mathbf{r}_0 = \frac{k-1}{k+4}\mathbf{a}_1.\end{aligned}$$

따라서 평형 위치(equilibrium position)는 OA 위의 점 $\mathbf{r}_0$이고($\mathbf{F} = \mathbf{0}$인 곳),

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{(k+4)\lambda}{am}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

P를 $\mathbf{r}_0$에서 OA를 따라 옮겼다가 정지 상태에서 놓으면, $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$은 처음에 $\mathbf{a}_1$과 평행하고, 가속도는 언제나 $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$과 평행하며, 초기 속도는 0이다. 그러므로 앞에서와 똑같이 $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \cos(\omega' t)(\mathbf{r}(0) - \mathbf{r}_0)$이다. 즉 P는 OA를 따라 직선 운동을 하며, $\mathbf{r}_0$을 중심으로 각진동수(angular frequency) ω'의 단진동을 한다. 여기서

$$\omega'^2 = \frac{(k+4)\lambda}{am}.$$

주기가 $T/2$인 것은 정확히 $\omega' = 2\omega$, 즉 $\omega'^2 = 4\omega^2$일 때이다.

$$\frac{(k+4)\lambda}{am} = \frac{20\lambda}{am} \quad \Longrightarrow \quad k + 4 = 20 \quad \Longrightarrow \quad k = 16.$$

$k = 16$일 때 평형 위치는 $\mathbf{r}_0 = \frac{15}{20}\mathbf{a}_1$로, O에서 A까지 가는 길의 4분의 3 지점이다. (모형이 성립하려면 진폭이 $\frac{1}{4}a$보다 작아서 P가 A의 구멍에 닿지 않아야 한다.)

검산

- $k = 1$로 두면 첫 번째 부분이 다시 나온다. 즉 $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$이고 $\omega'^2 = 5\lambda/(am)$이다.
- 단위: λ는 힘이므로 $\lambda/(am)$의 단위는 $\mathrm{N}/(\mathrm{m\,kg}) = \mathrm{s}^{-2}$이고, T는 시간이다.
- 무작위로 고른 1000개의 위치에서($a = 1.3$, $m = 0.7$, $\lambda = 2.1$로 두고) 다섯 장력 벡터를 더해 보았더니 정확히 $-5\lambda\mathbf{r}/a$가 나왔고, $k = 16$일 때는 정확히 $-20\lambda(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)/a$가 나왔다. $(0.4, -0.3)$에서 출발하는 운동을 수치적으로 계산하면 P는 O를 지나는 직선 위에 머물면서 시간 $T \approx 1.85$ 뒤에 출발점으로 돌아왔고, $k = 16$일 때 $\mathbf{r}_0 + 0.1a\,\hat{\mathbf{a}}_1$에서 출발하면 $T/2$ 뒤에 돌아왔다.

흔한 실수

- 늘어난 길이를 $|\mathbf{a}_i - \mathbf{r}| - a$나 $|\mathbf{r}|$로 잡는 것. 자연 길이 a는 탁자 아래 부분이 정확히 다 차지한다.
- 다섯 장력을 각도와 삼각함수로 분해하는 것. 그렇게 할 수도 있지만, 벡터를 쓰면 상쇄가 곧바로 드러난다.
- 새로운 진동의 중심이 여전히 O라고 가정하는 것. 더 뻣뻣한 줄이 평형 위치를 A 쪽으로 끌어당긴다.

STEP 너머

2차원에서 힘 $\mathbf{F} = -c\,\mathbf{r}$는 등방성 조화 진동자(isotropic harmonic oscillator)를 이룬다. (옆 방향의 초기 속도가 있는) 일반적인 운동은 평형점을 중심으로 하는 타원이며, 모든 궤도의 주기가 같다. 역제곱 법칙(inverse-square law)과 함께, 이것은 유계인 모든 궤도가 닫히는 단 두 가지 중심력(central force) 가운데 하나이다(베르트랑(Bertrand) 정리). Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 진동자와 중심력을 이러한 벡터 방식으로 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.