풀이

STEP III 1989, 문제 12

역학 • 회전 좌표계

> **STEP III 1989, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/89-s3-q12

핵심 아이디어

평면이 매끄럽고 막대는 가벼우며 자유롭게 회전하도록 고정되어 있으므로, P에 작용하는 수평 방향의 힘은 막대 방향으로만 작용한다. 따라서 AP에 수직인 방향으로 P의 가속도 성분은 0이어야 한다. 이 성분을 구한 뒤 이를 0으로 놓으면 ϕ에 대한 진자 방정식(pendulum equation)을 얻고, 흔히 쓰는 "ϕ를 곱한 뒤 적분하는" 기법으로 ϕ를 구할 수 있다.

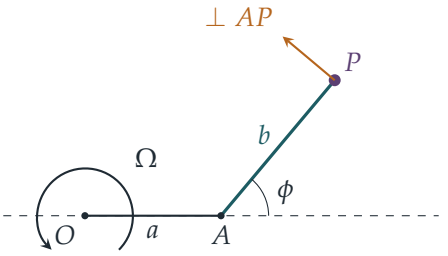
풀이

모형과 설정

P를 매끄러운 평면 위의 입자로, 막대를 A에서 자유롭게 회전하는 가볍고 휘지 않는 강체로 모형화한다. 고정된 좌표계, 즉 관성 좌표계(inertial frame)에서 생각한다. 평면 위의 위치를 복소수로 나타내되, O를 원점으로 하고 $t = 0$일 때의 OA 방향을 실축으로 잡으며, $\Omega > 0$을 시계 반대 방향으로 잡는다. A는 평면에 고정되어 있으므로 반지름이 a인 원 위를 움직이고, AP는 OA의 연장선과 각 ϕ를 이루는데, 이 연장선 자체는 Ωt만큼 회전해 있다. 따라서 $\theta = \Omega t + \phi$로 두면

$$z_A = a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}, \qquad z_P = a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t} + b\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

여기서 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$는 AP 방향의 단위벡터이고, $\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$는 ϕ가 증가하는 방향으로 AP에 수직인 단위벡터이다.



가속도의 수직 성분

$\dot\theta = \Omega + \dot\phi$이고 $\ddot\theta = \ddot\phi$임(Ω가 상수이므로)을 이용하여 미분하면

$$\dot z_P = \mathrm{i}a\Omega\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t} + \mathrm{i}b(\Omega+\dot\phi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},$$
$$\ddot z_P = -a\Omega^2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t} + b(\mathrm{i}\ddot\phi - (\Omega+\dot\phi)^2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

AP 방향과 그에 수직인 방향으로 분해하기 위해 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(\cos\phi - \mathrm{i}\sin\phi)$로 쓴다. 그러면

$$\ddot z_P = [-a\Omega^2\cos\phi - b(\Omega+\dot\phi)^2]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + [\,b\ddot\phi + a\Omega^2\sin\phi\,]\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

따라서 P의 가속도 중 AP에 수직이고 ϕ가 증가하는 방향의 성분은

$$\boxed{\,b\,\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2} + a\Omega^2\sin\phi\,}$$

이다. (첫째 항은 A를 중심으로 하는 원운동에서 익숙한 $b\ddot\phi$이다. 둘째 항은 A 자신이 O를 향해 갖는 구심가속도(centripetal acceleration) $a\Omega^2$를 막대에 수직인 방향으로 분해한 것에서 나온다.)

$\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t$ 구하기

생각해 보기 왜 이 가속도 성분은 0이어야 하는가?

P에 작용하는 힘은 무게와 수직항력(둘 다 연직 방향이고 서로 평형을 이룬다), 그리고 막대가 주는 힘뿐이며, 마찰력은 없다(평면이 매끄럽기 때문이다). A에서 자유롭게 회전하도록 고정된 가벼운 막대는 자기 길이 방향으로만 밀거나 당길 수 있다. 따라서 AP에 수직인 수평 방향의 힘은 없으며, 뉴턴(Newton)의 제2법칙에 의해

$$b\ddot\phi + a\Omega^2\sin\phi = 0.$$

이것이 진자 방정식이다. $\dot\phi$를 곱하고 적분하면

$$\tfrac{1}{2}b\dot\phi^2 = a\Omega^2\cos\phi + C.$$

초기 조건. 처음에 O, A, P는 한 직선 위에 있다. $b > a$이므로 P는 O와 A 사이에 있을 수 없고, P가 A 너머에 있다고 하면 $t = 0$에서 $\phi = 0$이다. 그러면 두 지수함수가 모두 1이 되어

$$\dot{z}_P(0) = \mathrm{i}[(a+b)\Omega + b\dot{\phi}(0)],$$

이고, 이 속도는 OP(실축)에 수직이다. $(a+b)\Omega$는 바로 P 아래에 있는 평면 위 점의 속력이고, $b\dot{\phi}(0)$은 평면에 대한 P의 상대 속력임에 유의하자. 문제에 인쇄된 속력은 $(a+2\sqrt{ab})\Omega$이지만, 이는 $(a+b+2\sqrt{ab})\Omega = (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2\Omega$의 오식으로 보이며, 바로 이 값이 주어진 결과를 이끌어 낸다(끝의 참고 참조). 이 값을 쓰면 P는 평면에 대해 $2\sqrt{ab}\,\Omega$의 속력으로 움직이므로

$$\dot{\phi}(0) = 2\Omega\sqrt{a/b}.$$

에너지 방정식에 $\phi = 0$을 대입하면 $\frac{1}{2}b \cdot 4a\Omega^2/b = a\Omega^2 + C$이므로 $C = a\Omega^2$이고

$$\tfrac{1}{2}b\dot{\phi}^2 = a\Omega^2(1+\cos\phi) = 2a\Omega^2\cos^2\tfrac{\phi}{2}, \qquad \text{따라서} \qquad \dot{\phi}^2 = \frac{4a\Omega^2}{b}\cos^2\tfrac{\phi}{2}.$$

처음에 $\dot{\phi} > 0$이고, $\dot{\phi}$의 부호가 바뀌려면 0을 지나야 하는데, 그러려면 $\cos\frac{\phi}{2} = 0$, 즉 $\phi = \pm\pi$여야 한다. 따라서 $-\pi < \phi < \pi$인 동안은 양의 제곱근을 택한다:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = 2\Omega\sqrt{\frac{a}{b}}\cos\frac{\phi}{2}}$$

P는 결코 OA를 가로지르지 않는다

? **생각해 보기** ϕ가 π까지 슬금슬금 다가가서 그것을 넘어갈 수는 없을까?

P가 직선 OA 위에 있는 것은 ϕ가 π의 배수일 때뿐이다($\phi = \pi$일 때는 O 너머로 거리 $b-a$만큼 떨어진 곳에 있다). $0 \le \phi < \pi$인 동안 $\dot{\phi} > 0$이므로 ϕ는 0에서부터 증가하고, 다시 직선 위로 돌아오는 유일한 방법은 $\phi = \pi$에 도달하는 것이다. 방정식을 풀어서 이런 일이 결코 일어나지 않음을 보이자. $k = \sqrt{a/b}$로 두고 변수분리(separation of variables)를 하면

$$\int_0^{\phi} \sec\tfrac{u}{2}\,\mathrm{d}u = 2k\Omega t \quad\Longrightarrow\quad \ln\Big(\sec\tfrac{\phi}{2} + \tan\tfrac{\phi}{2}\Big) = k\Omega t.$$

$s = \sin\frac{\phi}{2}$로 두면 $\sec\frac{\phi}{2} + \tan\frac{\phi}{2} = \frac{1+s}{\sqrt{1-s^2}} = \sqrt{\frac{1+s}{1-s}}$이므로, 좌변은 $\frac{1}{2}\ln\frac{1+s}{1-s} = \operatorname{artanh} s$이다. 따라서

$$\sin\frac{\phi}{2} = \tanh\Big(\Omega t\sqrt{\tfrac{a}{b}}\Big).$$

모든 $t > 0$에 대해 우변은 0과 1 사이에(양 끝은 제외하고) 있으므로, 모든 $t > 0$에 대해 $0 < \phi < \pi$이다. 그러면 P는 항상 직선 OA의 한쪽에만 엄격하게 머문다. $t \to \infty$일 때 직선(의 O 너머의 점)에 다가가지만 결코 도달하지 않으므로, P는 결코 OA를 가로지르지 않는다. ■

(풀지 않고도 알 수 있다: $\phi = \pi, \dot{\phi} = 0$은 진자 방정식의 평형점(equilibrium)이고, 그 근처에서 $\psi = \pi - \phi$는 $\dot{\psi} \approx -k\Omega\psi$를 만족하므로 ψ는 지수적으로 감소하며 결코 0이 되지 않는다.)

인쇄된 속력에 대한 참고. 속력을 글자 그대로 $(a + 2\sqrt{ab})\Omega$로 받아들이면 $\dot{\phi}(0) = (2k - 1)\Omega$이고, 같은 방식으로 적분하면 $\dot{\phi}^2 = \Omega^2[(2k-1)^2 - 4k^2 \sin^2 \frac{\phi}{2}]$를 얻는다. 이는 깔끔한 식이 아니다. 이 경우 P는 $\phi = 0$을 중심으로 진동하거나(흔들릴 때마다 OA의 연장선을 가로지른다) $b < 16a$일 때 그렇고, $b > 16a$이면 한 바퀴 완전히 돌면서 OA를 가로지른다. 따라서 인쇄된 값은 의도된 것일 수 없다.

검산

- $a = 0$으로 두면 A가 O에 놓이고, 그러면 $\dot{\phi} \equiv 0$이다: P는 그저 평면과 함께 속력 $b\Omega$로 돈다. 초기 속력이 $b\Omega$가 되므로 이는 옳다.
- 단위: $\Omega\sqrt{a/b}$는 비율이므로 단위가 s^{-1}이며, 이는 $\dot{\phi}$의 단위로서 마땅하다.
- $b\ddot{\phi} = -a\Omega^2 \sin\phi$를 $a = 1$, $b = 3$, $\Omega = 1.3$으로 두고 수치적으로(RK4) 계산했다. $t = 2$에서 $\phi \approx 2.2644$, $\dot{\phi} \approx 0.6375$를 얻었고, 이는 $2\arcsin\tanh(\Omega t\sqrt{a/b})$ 및 $2\Omega\sqrt{a/b}\cos\frac{\phi}{2}$와 유효숫자 10자리까지 일치한다. $t = 10$에서는 $\phi \approx 3.1394 < \pi$이다.

흔한 실수

- 좌표계 자체의 기여 $(a + b)\Omega$가 P의 초기 속도에 더해진다는 것을 잊고, 주어진 속력을 평면에 대한 상대 속력으로 취급하는 것.
- P의 가속도를 단순히 A를 중심으로 하는 원운동의 가속도로 쓰는 것. 회전축 A 자체가 가속하고 있으며, $a\Omega^2 \sin\phi$ 항은 바로 여기서 나온다.
- $a\Omega^2 \sin\phi$의 부호를 틀리는 것. 부호가 틀리면 $\phi = 0$이 불안정해지는데, "원심력"에 의한 당김은 O에서 멀어지는 방향이므로 이는 물리적으로 맞지 않는다.

STEP 너머

회전하는 평면에서 보면, P는 균일한 "중력" $a\Omega^2$ 속에 매달린 진자이며, 이 중력은 OA의 연장선 방향을 향한다. 코리올리 힘(Coriolis force)은 막대 방향으로 작용하므로 일을 하지 않아 식에서 사라진다. 초기 조건은 운동을 정확히 **분리선**(separatrix) 위에 놓는다. 분리선이란 흔들리는 운동과 꼭대기를 넘어가는 운동의 경계로, 이 위에서 진자는 거꾸로 선 위치에 도달하는 데 무한한 시간이 걸린다. 이와 같은 회전 좌표계, 겉보기 힘(fictitious force), 위상 평면(phase plane) 그림은 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*에

서 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.