풀이

STEP III 1989, 문제 11

역학 • 구의 비스듬한 충돌

STEP III 1989, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/89-s3-q11

핵심 아이디어

먼저 충돌 순간의 기하를 확정한다. 이것이 중심선(line of centres)을 결정하고, 나머지는 모두 여기서 따라 나온다. 그다음 한 구가 구속되어 있을 때 매끄러운 구들의 비스듬한 충돌(oblique impact)을 다루는 표준 절차를 따른다. 두 구 사이의 충격량(impulse)은 중심선을 따라 작용한다. 뉴턴(Newton)의 반발 법칙(law of restitution)은 이 선 방향의 속도 성분에 적용된다. 그리고 운동량 보존(conservation of momentum)은 끈이나 회전축이 자체적으로 충격량을 가하기 때문에 성립하지 않으므로, 그 대신 구속이 영향을 주지 않는 방정식을 사용한다. 끈에 매달린 A에 대해서는 수평 방향 운동량을, 막대의 경우에는 O에 대한 각운동량(angular momentum)을 쓴다.

풀이

충돌 순간의 기하

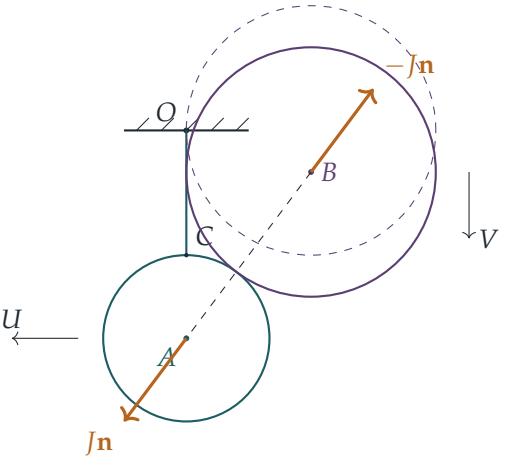
두 구는 모두 매끄럽고 균일하며, 끈은 가볍고 늘어나지 않는다고 모형화한다. 충돌 전에 끈은 수직으로 늘어져 있다. C가 직선 OA 위에 있으므로 $OA = 3a + 2a = 5a$이고, A는 O의 바로 아래에 있다.

구 B는 $OB = 3a$가 수평인 상태에서 출발하여 수직으로 떨어진다. B가 거리 h만큼 떨어졌다고 하자. 충돌 순간 두 구는 맞닿으므로 $AB = 2a + 3a = 5a$이다. A와 B의 수평 거리는 $3a$이므로, 수직 거리는 $\sqrt{25a^2 - 9a^2} = 4a$이다. 따라서 B는 A보다 $4a$ 위, 곧 O의 높이보다 a 아래에 있고, $h = a$이다.

그러므로 중심선은 3–4–5 삼각형을 이룬다. B에서 A로 가면서 (OA 쪽으로) 수평 방향으로 $3a$, 아래로 $4a$ 간다. $\mathbf{n}$을 B에서 A를 향하는 단위벡터라 하고, x축을 OA에서 B를 향하는 수

평 방향으로 잡는다. 그러면

$$\mathbf{n} = \left(-\tfrac{3}{5}, -\tfrac{4}{5}\right).$$



점선으로 그린 구는 B의 출발 위치를, 실선으로 그린 구는 충돌 순간의 위치를 나타낸다.

끈이 있을 때의 충돌

두 구 사이 충격량의 크기를 J라 하자. 그러면 A는 $J\mathbf{n}$을, B는 $-J\mathbf{n}$을 받는다. 두 구는 매끄러우므로 $J\mathbf{n}$은 중심선을 따라 작용하며 A를 지난다. 끈의 충격량은 OC 방향으로 작용하는데, 이 역시 A를 지난다. 따라서 구 A를 회전시키는 것은 아무것도 없고, A는 O를 중심으로 하는 반지름 $5a$인 원 위를 움직이는 입자처럼 운동한다. 충돌 직후 끈은 여전히 수직이므로 A는 음의 x 방향으로 속력 U로 수평 운동한다.

구 A, 수평 방향. 끈은 수평 방향 충격량을 주지 않으므로

$$3mU = \tfrac{3}{5}J, \qquad \text{곧} \qquad J = 5mU.$$

(수직 방향으로는 끈이 위쪽으로 충격량 $\frac{4}{5}J$를 가하여 $J\mathbf{n}$의 아래쪽 성분을 상쇄한다. 이 값이 양수이므로 끈은 실제로 팽팽한 상태를 유지한다.)

구 B. 충돌 전 $\mathbf{v}_B = (0, -V)$이고, 이것의 $\mathbf{n}$ 방향 성분은 $\frac{4}{5}V$이다. 충격량 $-J\mathbf{n}$은 이 성분만 바꾸며, 이를 $J/(25m)$만큼 줄인다.

$$\mathbf{v}_B' \cdot \mathbf{n} = \tfrac{4}{5}V - \frac{J}{25m} = \tfrac{4}{5}V - \tfrac{1}{5}U.$$

? **생각해 보기** 왜 중심선 방향으로 그냥 운동량을 보존하면 안 될까?

끈이 A에 가하는 충격량은 수직 방향이고, 이는 $\mathbf{n}$ 방향 성분을 가진다. 그러므로 $\mathbf{n}$ 방향의 전체 운동량은 변한다. 외부 충격량이 작용하지 않는 유일한 방향은 수평 방향이며, 그래서 A에 대해 그 방정식을 사용한 것이다.

반발. A는 처음에 정지해 있으므로 $\mathbf{n}$ 방향의 접근 속력은 $\frac{4}{5}V - 0$이다. 분리 속력은 $\mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{n} - \mathbf{v}'_B \cdot \mathbf{n}$이고, 여기서 $\mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{n} = (-U)(-\frac{3}{5}) = \frac{3}{5}U$이다. 따라서

$$\tfrac{3}{5}U - \left(\tfrac{4}{5}V - \tfrac{1}{5}U\right) = \tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{4}{5}V \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{4}{5}U = \tfrac{7}{5}V \quad\Longrightarrow\quad U = \tfrac{7}{4}V.$$

막대가 있을 때의 충돌

이제 구와 막대는 O를 중심으로 회전하는 하나의 강체를 이룬다. 회전축은 어느 방향으로든 충격량을 가할 수 있으므로 수평 방향 운동량은 더 이상 보존되지 않는다. 그러나 회전축의 충격량은 O에서 작용하므로 O에 대한 모멘트를 취한다. 평행축 정리(parallel axis theorem)에 의해 O에 대한 이 강체의 관성 모멘트(moment of inertia)는

$$I = \tfrac{2}{5}(3m)(2a)^2 + 3m(5a)^2 = \tfrac{24}{5}ma^2 + 75ma^2 = \tfrac{399}{5}ma^2.$$

충격량 $J\mathbf{n}$은 O보다 깊이 $5a$ 아래에 있는 A를 지나 작용한다. 이 중 수평 성분 $\frac{3}{5}J$만이 O에 대한 모멘트를 가지며, 그 모멘트는 $5a \cdot \frac{3}{5}J = 3aJ$이다. 충돌 직후 강체의 각속력을 ω라 하면 A는 속력 $U' = 5a\omega$로 수평 운동하고,

$$I\omega = 3aJ \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{399}{5}ma^2 \cdot \frac{U'}{5a} = 3aJ \quad\Longrightarrow\quad J = \tfrac{133}{25}\,mU'.$$

B에 대한 방정식과 반발 방정식은 $\mathbf{n}$ 방향 성분만 포함하므로 앞에서와 똑같다. 따라서

$$\tfrac{3}{5}U' - \left(\tfrac{4}{5}V - \frac{J}{25m}\right) = \tfrac{3}{5}V \quad\Longrightarrow\quad \left(\tfrac{3}{5} + \tfrac{133}{625}\right)U' = \tfrac{7}{5}V \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{508}{625}U' = \tfrac{7}{5}V,$$

이므로 $U' = \frac{875}{508}V$이다. 이를 $U = \frac{7}{4}V$와 비교하면

$$\frac{U'}{U} = \frac{875}{508}\cdot\frac{4}{7} = \frac{500}{508} = \frac{125}{127},$$

이므로 충돌 직후 A의 속력은 요구한 대로 $125U/127$이다.

답이 앞의 경우보다 조금 작은 것은 이치에 맞다. 끈이 있을 때 A는 질량 $3m$인 입자처럼 수평 운동에 저항한다. 막대가 있을 때는 구가 회전도 시작해야 하므로, A에서의 유효 수평 질량은 $I/(5a)^2 = \frac{399}{125}m$이 되어 $3m$보다 약간 크다.

검산

- 에너지: $m = a = V = 1$로 두면 충돌 전 운동 에너지는 12.5이다. 충돌 후에는 끈의 경우 11.625, 막대의 경우 약 11.58이다. $e < 1$일 때 마땅히 그래야 하듯이 둘 다 더 작다.

- 탄성 극한: $e = 1$이고 끈이 있는 경우, 같은 단계를 거치면 $\frac{4}{5}U = \frac{8}{5}V$, 곧 $U = 2V$가 되고 운동 에너지가 정확히 보존된다. 이로써 부호가 맞음을 확인할 수 있다.
- $a = m = V = 1$로 두고 컴퓨터로 두 충돌을 정확한 분수로 풀었다. 그 결과 $U = 7/4$, $U' = 875/508$을 얻었고, 비는 $125/127$이었다. 또한 B의 접선 방향 속도가 변하지 않는다는 것과 B가 접촉 전에 거리 a만큼 떨어진다는 것도 확인하였다.

흔한 실수

- 중심선 방향으로 전체 운동량을 보존하는 것. 끈이나 회전축이 그 방향 성분을 가진 외부 충격량을 가한다.
- 막대에 달린 구가 회전한다는 사실을 잊는 것. O에 대한 관성 모멘트에는 $3m(5a)^2$뿐만 아니라 $\frac{2}{5}(3m)(2a)^2$ 항도 필요하다.
- 중심선을 45° 기울어진 것으로 보거나 수직인 것으로 보는 것. 맞닿는 조건이 중심선을 3–4–5 삼각형으로 확정한다.

STEP 너머

구속된 충돌은 **강체의 충격 운동**(impulsive motion of rigid bodies)을 처음 맛보는 것이다. 일반적인 규칙은 고정된 회전축에서의 충격량이 그 회전축에 대한 각운동량 방정식에서 빠진다는 것이다. 이는 **타격 중심**(centre of percussion)이라는 개념으로 이어진다. 타격 중심이란 회전축에 매달린 물체를 쳤을 때 회전축이 충격을 전혀 느끼지 않게 되는 점으로, 크리켓 배트에 "스위트 스폿"이 있는 이유가 바로 이것이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 각운동량과 강체의 충격량을 정확히 이 수준에서 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.