풀이

STEP III 1989, 문제 10

순수수학 • 리만 합

STEP III 1989, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/89-s3-q10

이 문제는 *Beyond STEP*의 4.1 절 **적분이란 무엇인가?**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch04/riemann.html

핵심 아이디어

연속한 정수들의 곱은 r^5의 "하강 거듭제곱(falling power)" 판이며, r^5를 적분하는 것과 똑같이 망원급수(telescoping) 방식으로 합을 구할 수 있다. 즉 연속한 두 개의 여섯 항 곱의 차는 다섯 항 곱의 여섯 배이다. 소문항 (i)과 (ii)는 $\sum r^5$보다 조금 크고 조금 작은 곱의 합을 준다. 그러면 소문항 (iii)에서는 x^5의 두 리만 합(Riemann sum)을 이 경계들 사이에 끼워 넣는데, 두 경계는 같은 극한으로 수렴한다.

풀이

소문항 (i)

$P(r) = r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)(r+5)$라 하자. 그러면 $P(r)$와 $P(r-1) = (r-1)r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)$는 다섯 개의 인수 $r(r+1)\cdots(r+4)$를 공통으로 가지므로

$$\begin{aligned} P(r) - P(r-1) &= r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)\big[(r+5) - (r-1)\big] \\ &= 6\,r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4). \end{aligned}$$

$r = 1$부터 n까지 더하면 우변이 차례로 소거된다.

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{n} r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4) &= \tfrac{1}{6}\sum_{r=1}^{n}\big[P(r) - P(r-1)\big] = \tfrac{1}{6}\big[P(n) - P(0)\big] \\ &= \tfrac{1}{6}\,n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5), \end{aligned}$$

이는 $P(0) = 0$이기 때문이다. (n에 대한 수학적 귀납법(induction)으로도 똑같이 증명할 수 있으며, 귀납 단계는 같은 인수분해이다.)

이제 부등식을 이끌어 내자. $r \geq 1$이면 $k = 1, 2, 3, 4$에 대하여 각 인수가 $r + k > r > 0$을 만족하므로

$$r^5 < r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4) \qquad (r \geq 1).$$

이 엄격한 부등식(strict inequality)들을 $r = 1, \ldots, n$에 대하여 더하면 $\sum_{r=1}^{n} r^5 < \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)$를 얻으며, 이것이 증명하려던 것이다.

소문항 (ii)

이번에는 r^5보다 작은 곱이 필요하므로 인수들을 아래로 이동시켜 $(r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r$를 사용한다. $Q(r) = (r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r(r+1)$이라 하면, 같은 인수분해에 의하여

$$\begin{aligned} Q(r) - Q(r-1) &= (r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r\big[(r+1) - (r-5)\big] \\ &= 6\,(r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r. \end{aligned}$$

$r = 0$부터 $n-1$까지 더하면

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{n-1} (r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r &= \tfrac{1}{6}\big[Q(n-1) - Q(-1)\big] \\ &= \tfrac{1}{6}\,(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n, \end{aligned}$$

이는 $Q(-1) = (-5)(-4)(-3)(-2)(-1)\cdot 0 = 0$이기 때문이다.

> **생각해 보기** 합에 들어가는 모든 r에 대하여 $(r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r < r^5$가 성립하는가?

꼭 그렇지는 않으며, 바로 여기서 $n > 1$이라는 조건이 필요하다. 항별로 비교해 보자.

- $r = 0$: 양변이 모두 0이므로 등호만 성립한다.
- $r = 1, 2, 3, 4$: 곱에 0인 인수가 있으므로 곱은 $0 < r^5$이다.
- $r \geq 5$: $k = 1, 2, 3, 4$에 대하여 모든 인수가 $0 < r - k < r$를 만족하므로 곱은 $< r^5$이다.

따라서 모든 $r \geq 0$에 대하여 $(r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r \leq r^5$이고, $r \geq 1$이면 항상 엄격한 부등식이 성립한다. $n > 1$이면 $r = 0$부터 $n-1$까지의 합에 $r = 1$인 항이 들어가므로 적어도 하나의 부등식이 엄격하게 성립하고,

$$\sum_{r=0}^{n-1} r^5 > \tfrac{1}{6}(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n.$$

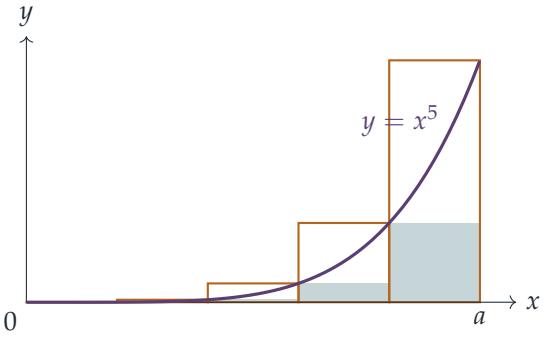
($n = 1$이면 양변이 모두 0이며, 이것이 조건이 필요한 이유이다.)

소문항 (iii)

증가함수(increasing function)인 $f(x) = x^5$을 택하자. 정의에 나오는 두 합은

$$L_n = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{a}{n}\left(\frac{ra}{n}\right)^5 = \frac{a^6}{n^6}\sum_{r=0}^{n-1} r^5, \qquad U_n = \sum_{r=1}^{n} \frac{a}{n}\left(\frac{ra}{n}\right)^5 = \frac{a^6}{n^6}\sum_{r=1}^{n} r^5.$$

$a > 0$이면 이들은 곡선 아래와 위에 놓인 직사각형들의 넓이이다.



(색칠한 부분: L_n, 테두리: U_n, 여기서 $n = 5$이다.) 그러나 아래의 계산에는 $a > 0$이 필요하지 않다. $a \neq 0$인 모든 a에 대하여 $a^6 > 0$이고, $a = 0$이면 모든 합이 0이므로 자명하다.

L_n에는 소문항 (ii)를 ($n > 1$일 때), U_n에는 소문항 (i)을 적용하면

$$L_n > \frac{a^6}{6n^6}(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n = \frac{a^6}{6}\prod_{k=1}^{5}\left(1-\frac{k}{n}\right),$$

$$U_n < \frac{a^6}{6n^6}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5) = \frac{a^6}{6}\prod_{k=1}^{5}\left(1+\frac{k}{n}\right).$$

또한 $U_n - L_n = \frac{a^6}{n^6}(n^5 - 0^5) = \frac{a^6}{n} > 0$이므로, 이를 모두 합치면

$$\frac{a^6}{6}\prod_{k=1}^{5}\left(1-\frac{k}{n}\right) < L_n < U_n < \frac{a^6}{6}\prod_{k=1}^{5}\left(1+\frac{k}{n}\right).$$

$n \to \infty$일 때 각 괄호는 1로 수렴하므로 바깥쪽의 두 경계는 모두 $\frac{1}{6}a^6$으로 수렴한다. 조임 정리(squeeze theorem, sandwich theorem)에 의하여 L_n과 U_n은 모두 수렴하고, 그 극한은 같은 값 $\frac{1}{6}a^6$이다. 따라서 정의에 나오는 두 극한이 모두 존재하고 서로 같으므로

$$\int_0^a x^5\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{6}a^6.$$

검산

- (i)의 작은 경우: $n = 1$이면 $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5 = 120 = \frac{1}{6}\cdot720$이고, $n = 2$이면 $120 + 720 = 840 = \frac{1}{6}\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7$이다.

- (i)과 (ii)의 항등식과 두 부등식은 200 이하의 모든 n에 대하여 정확히 성립한다(컴퓨터로 확인함).
- $a = 1$, $n = 1000$이면 $L_n \approx 0.166167$, $U_n \approx 0.167167$로 $\frac{1}{6} \approx 0.166667$의 양쪽에 놓이고, $U_n - L_n = 0.001 = a^6/n$이다.

흔한 실수

- 모든 $r \geq 0$에 대하여 $(r-4)\cdots r < r^5$라고 주장하는 것: $r = 0$에서는 등호가 성립하므로, 엄격한 부등식을 얻으려면 $r = 1$인 항, 즉 $n > 1$이 필요하다.
- L_n과 U_n이 유계(bounded)라는 것만 보이거나, $U_n - L_n \to 0$이라는 것만 보이는 것. 정의에서는 두 극한이 모두 **존재**해야 하며, 조임 정리는 존재성과 그 값을 한꺼번에 준다.

STEP 너머

소문항 (iii)은 리만 적분(Riemann integral, 또는 다르부 적분(Darboux integral))을 직접 손으로 다루어 보는 것이다. 함수의 하합(lower sum)과 상합(upper sum)을 서로 조여 붙일 수 있을 때 그 함수는 적분가능(integrable)하며, 단조함수(monotonic function)의 경우 그 차는 언제나 $(b-a)\,|f(b) - f(a)|/n$이므로 닫힌구간에서 정의된 모든 단조함수는 적분가능하다. (i)과 (ii)의 곱은 "상승 계승(rising factorial)" 거듭제곱과 "하강 계승(falling factorial)" 거듭제곱으로, 이를 이용하면 유한 차분법(calculus of finite differences)이 보통의 미적분과 똑같은 모습이 된다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 이러한 방식으로 적분을 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.