풀이

# STEP III 1989, 문제 1

순수수학 • 회전면

**STEP III 1989, 1번 문제**

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/89-s3-q1

## 핵심 아이디어

구는 반원을 회전시켜 얻은 회전면(surface of revolution)이므로, 구대(zone)의 넓이는 표준적인 회전면 넓이 적분으로 구할 수 있다. 놀라운 점은 피적분함수가 상수가 된다는 것이며, 바로 이 때문에 답이 두 평면 사이의 거리에만 의존한다. 둘째 부분에서는 곡면이 원뿔($OP$에서 생김)과 구대(호 $PR$에서 생김)로 나뉜다. 그러면 어려운 부분은 첫째 결과가 해결해 주고, 접선 조건이 필요한 직각삼각형을 제공한다.

인쇄된 방정식에 대해 한마디 하자면, 우변이 $c^2$이면 원이 $O$를 지나고 상수 $a$가 전혀 나타나지 않는다. 의도된 곡선은 분명히

$$(x-c)^2 + y^2 = a^2,$$

즉 중심이 $C = (c, 0)$이고 반지름이 $a$인 원이다. $c > a$이므로 원점은 원의 바깥에 있고, 따라서 $O$에서 그은 접선이 존재한다. 이 곡선에 대하여 문제를 푼다.

## 풀이

### 구대의 넓이

중심이 원점이고 반지름이 $r$인 구를 생각하고, $x$축을 두 평면에 수직이 되도록 잡자. 두 평면은 $x = h_1$, $x = h_2$이고 $-r \le h_1 < h_2 \le r$이다. 구는 위쪽 반원 $y = \sqrt{r^2 - x^2}$을 $x$축 둘레로 $2\pi$만큼 회전시켜 얻으므로, 구대의 넓이는

$$S = \int_{h_1}^{h_2} 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\, \mathrm{d}x.$$

이다. 여기서 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$이므로 $|x| < r$일 때

$$y\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2} = \sqrt{r^2-x^2}\sqrt{\frac{r^2-x^2+x^2}{r^2-x^2}} = \sqrt{r^2-x^2}\cdot\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}} = r.$$

이다.

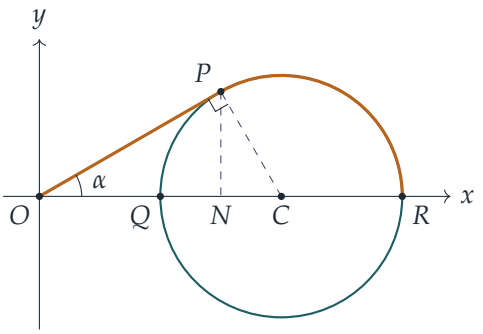
> ? **생각해 보기** $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$가 무한대가 되는 $x = \pm r$에서는 어떻게 되는가?

도함수(derivative)는 극점에서 발산하지만, 곱 $y\sqrt{1+(y')^2}$은 $(-r, r)$ 전체에서 $r$과 같으므로 유계이다. 평면이 구에 접하는 경우($h_1 = -r$ 또는 $h_2 = r$)에도 적분은 무해한 방식으로만 이상적분(improper integral)이 된다. $h_2 - \varepsilon$까지 적분한 다음 $\varepsilon \to 0$으로 보내면 된다. (또는 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$로 매개화하면 이 문제를 아예 피할 수 있다.) 따라서

$$S = \int_{h_1}^{h_2} 2\pi r\,\mathrm{d}x = 2\pi r\,(h_2 - h_1),$$

이고, 이는 $2\pi \times$ (반지름) $\times$ (두 평면 사이의 거리)이므로 증명이 끝난다.

**곡면**




$C = (c, 0)$을 중심이라 하고, $N$을 $P$에서 $x$축에 내린 수선의 발이라 하자. 그러면 $Q = (c-a, 0)$, $R = (c+a, 0)$이다. 호 $PR$은 $Q$를 지나지 않는 쪽의 호이다(호박색으로 표시). $P$에서 $R$까지의 다른 호는 $Q$를 지나 원의 아래쪽을 돌아가며, 이것을 회전시키면 구 전체가 만들어진다.

접선은 접점에서 반지름에 수직이므로 각 $OPC$는 직각이다. 삼각형 $OPC$에서 $OC = c$, $CP = a$이므로 피타고라스(Pythagoras) 정리에 의하여

$$OP = \sqrt{c^2-a^2}.$$

이다. $\alpha$를 각 $POC$라 하자. 그러면 $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{c^2-a^2}}{c}$이므로

$$PN = OP\sin\alpha = \frac{a\sqrt{c^2-a^2}}{c}, \qquad ON = OP\cos\alpha = \frac{c^2-a^2}{c}.$$

이다.

**원뿔.** $OP$를 $x$축 둘레로 회전시키면 모선의 길이(slant height)가 $l = OP$이고 밑면의 반지름이 $PN$인 원뿔이 된다. 그 옆넓이는 $\pi \times$ (밑면의 반지름) $\times$ (모선의 길이)이므로

$$\pi \cdot \frac{a\sqrt{c^2-a^2}}{c} \cdot \sqrt{c^2-a^2} = \frac{\pi a(c^2-a^2)}{c}.$$

이다.

**구대.** 호 $PR$을 회전시키면 구(중심 $C$, 반지름 $a$) 가운데 $N$을 지나고 축에 수직인 평면과 $R$에서의 접평면 사이에 놓인 부분이 된다. 이 두 평면 사이의 거리는

$$NR = (c+a) - \frac{c^2-a^2}{c} = \frac{ac+a^2}{c} = \frac{a(c+a)}{c}$$

이므로, 첫째 결과에 의하여 구대의 넓이는

$$2\pi a \cdot \frac{a(c+a)}{c} = \frac{2\pi a^2(c+a)}{c}.$$

이다.

**전체.** 두 부분을 더하면

$$\begin{aligned} \text{넓이} &= \frac{\pi a}{c}\left[(c^2-a^2) + 2a(c+a)\right] \\ &= \frac{\pi a}{c}(c^2+2ac+a^2) \\ &= \frac{\pi a(c+a)^2}{c}. \end{aligned}$$

이다.

## 검산

- $a = 1, c = 2$로 놓자. 그러면 $P = \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이고, 원뿔의 넓이는 $\frac{3\pi}{2}$, 구대의 넓이는 $3\pi$이므로 전체는 $\frac{9\pi}{2} \approx 14.137$이다. 곡선을 20 000개의 짧은 선분으로 근사하고 그로부터 생기는 원뿔대들의 넓이를 더하면 14.13717을 얻는다.
- $a \to c$이면 $P$가 $O$에 가까워지고 원뿔은 사라진다. 곡면은 반지름이 $c$인 구 전체가 되며, 실제로 $\pi c(2c)^2/c = 4\pi c^2$이다.
- $a$를 고정하고 $c \to \infty$로 보내면 넓이는 $\pi ac$처럼 커지는데, 이는 모선의 길이가 약 $c$이고 밑면의 반지름이 약 $a$인 길고 가는 원뿔의 넓이이다. 예상한 그대로이다.

## 흔한 실수

- 원뿔의 모선의 길이로 $OP$ 대신 $OC$나 $ON$을 쓰는 것.

- 구대의 두께를 $P$에서 내린 수선의 발 $N$이 아니라 $C$나 $Q$에서부터 재는 것.
- 공식 $2\pi rh$에서 $r = a$ 대신 $r = c$를 쓰는 것. 잘리는 구는 $C$를 중심으로 하는 반지름 $a$인 구이며, $O$를 중심으로 하는 어떤 것도 아니다.

## STEP 너머

구대에 관한 결과는 아르키메데스(Archimedes)의 정리이다. 구를 외접하는 원기둥에 수평으로 사영하면 넓이가 보존되는데, 이것이 람베르트(Lambert) 정적 도법(equal-area map projection)의 바탕이 되는 아이디어이다. 또한 이는 구 위에서 균등하게 고른 점의 높이가 균등분포(uniform distribution)를 따르는 이유도 설명해 준다. 회전면의 넓이는 대학 1학년 벡터 미적분학 강의에서 배우는 면적분(surface integral) $\iint |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$의 첫 번째 사례이다. 곡률과 곡면을 아름답게 기하학적으로 바라보는 관점은 Needham, *Visual Differential Geometry and Forms*(시각적 미분기하학과 미분형식)을 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.