풀이

STEP II 1989, 문제 9

순수수학 • 행렬 지수함수와 연립 미분방정식

STEP II 1989, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/89-s2-q9

핵심 아이디어

모든 것은 작은 계산 하나에 달려 있다. $\mathbf{A}^2$을 계산해 보면 항등행렬(identity matrix)이 된다. 그러면 $\mathbf{A}$의 짝수 거듭제곱은 모두 $\mathbf{I}$이고 홀수 거듭제곱은 모두 $\mathbf{A}$이므로, 급수는 지수급수(exponential series)의 짝수 부분과 홀수 부분으로 나뉜다. 이 두 부분이 바로 $\cosh t$와 $\sinh t$이다. 미분방정식(differential equation)은 스칼라 경우의 적분인자(integrating factor) 방법을 그대로 따라 풀며, 이때 행렬 $\mathbf{F}$가 $\mathrm{e}^{\int a\,\mathrm{d}t}$의 역할을 한다.

풀이

행렬 $\mathbf{F}$

곱을 전개하면

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-8 & 3-3 \\ -24+24 & -8+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}.$$

따라서 모든 $k \geq 0$에 대하여 $\mathbf{A}^{2k} = (\mathbf{A}^2)^k = \mathbf{I}$이고 $\mathbf{A}^{2k+1} = \mathbf{A}^{2k}\mathbf{A} = \mathbf{A}$이다. $\mathbf{I} = \frac{t^0}{0!}\mathbf{A}^0$으로 쓰고 급수를 n이 짝수인 항과 홀수인 항으로 나누면(행렬 급수의 각 성분은 절대수렴(absolutely convergent)하는 스칼라 급수를 재배열한 것이므로 이렇게 해도 된다)

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!}\mathbf{A}^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\mathbf{A}^{2k+1} \\ &= \mathbf{I}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} + \mathbf{A}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} = \mathbf{I}\cosh t + \mathbf{A}\sinh t,\end{aligned}$$

이다. 여기서 매클로린 급수(Maclaurin series) $\cosh t = \sum t^{2k}/(2k)!$와 $\sinh t = \sum t^{2k+1}/(2k+1)!$를 이용하였다. 이것이 요구된 꼴이다.

역행렬

$\mathbf{G} = \mathbf{I}\cosh t - \mathbf{A}\sinh t$라 하자. $\mathbf{I}$와 $\mathbf{A}$는 교환(commute)하므로 보통의 수처럼 곱을 전개할 수 있다.

$$\mathbf{FG} = \mathbf{I}\cosh^2 t - \mathbf{A}^2\sinh^2 t + (\mathbf{A} - \mathbf{A})\cosh t \sinh t = \mathbf{I}(\cosh^2 t - \sinh^2 t) = \mathbf{I},$$

여기서 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$와 $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$을 이용하였다. 같은 계산으로 $\mathbf{GF} = \mathbf{I}$도 얻으므로 $\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{I}\cosh t - \mathbf{A}\sinh t$이다.

도함수

성분별로 미분하면(행렬 $\mathbf{I}$와 $\mathbf{A}$는 상수이다)

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{F}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{I}\sinh t + \mathbf{A}\cosh t, \qquad \text{한편} \qquad \mathbf{FA} = \mathbf{A}\cosh t + \mathbf{A}^2\sinh t = \mathbf{A}\cosh t + \mathbf{I}\sinh t.$$

두 식이 일치하므로 $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{F}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{FA}$이다. 또한 $\mathbf{F}$는 $\mathbf{I}$와 $\mathbf{A}$로 만들어졌으므로 $\mathbf{FA} = \mathbf{AF}$임에 주의한다.

미분방정식

스칼라 방정식 $r' + ar = 0$에서는 도함수가 $\mathrm{e}^{at}a$인 e^{at}를 곱하여 좌변이 어떤 함수의 도함수가 되게 한다. 행렬 $\mathbf{F}$는 바로 이 성질 $\mathbf{F}' = \mathbf{FA}$를 가지므로, 방정식의 **왼쪽**에 $\mathbf{F}$를 곱한다.

$$\mathbf{F}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} + \mathbf{FAr} = \mathbf{0}.$$

곱의 미분법(product rule)에 의하여(인수의 순서만 지키면 행렬의 곱에서도 성립한다)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{Fr}) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{F}}{\mathrm{d}t}\mathbf{r} + \mathbf{F}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{FAr} + \mathbf{F}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t},$$

이고, 이것은 정확히 좌변과 같다. 따라서 방정식은

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{Fr}) = \mathbf{0},$$

을 뜻하고, $\mathbf{Fr}$는 상수 벡터 $\mathbf{c}$이다.

? **생각해 보기** 왜 오른쪽이 아니라 왼쪽에 곱하는가? 그리고 $\mathbf{c}$는 어떻게 구하는가?

곱 $\mathbf{rF}$는 정의조차 되지 않는다($\mathbf{r}$는 2×1 열벡터이다). 또 곱의 미분법에서 나온 $\mathbf{FAr}$는 $\mathbf{F}$가 왼쪽에 있을 때에만 항 $\mathbf{F}(\mathbf{Ar})$와 일치한다. 상수를 구하려면 $t = 0$을 대입한다. 이때 $\cosh 0 = 1$, $\sinh 0 = 0$이므로 $\mathbf{F} = \mathbf{I}$이고

$$\mathbf{c} = \mathbf{I}\,\mathbf{r}(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

이제 $\mathbf{Fr} = \mathbf{c}$의 왼쪽에 앞에서 구한 $\mathbf{F}^{-1}$를 곱한다.

$$\mathbf{r} = \mathbf{F}^{-1}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \cosh t\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} - \sinh t\begin{pmatrix}-3 & -1\\ 8 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \cosh t\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} - \sinh t\begin{pmatrix}-3\alpha-\beta\\ 8\alpha+3\beta\end{pmatrix}.$$

성분을 읽으면

$$x(t) = \alpha\cosh t + (3\alpha+\beta)\sinh t,$$
$$y(t) = \beta\cosh t - (8\alpha+3\beta)\sinh t,$$

이고, 이것이 요구된 결과이다.

검산

- $t = 0$에서 이 식들은 당연히 그래야 하듯이 $x = \alpha$, $y = \beta$를 준다.
- 직접 대입: $x' = \alpha\sinh t + (3\alpha+\beta)\cosh t$이고, $-(-3x-y) = 3x+y = (3\alpha+\beta)\cosh t + \alpha\sinh t$이다($9\alpha+3\beta-8\alpha-3\beta = \alpha$를 이용). 따라서 $x' = -$(다음 벡터의 첫째 성분: $\mathbf{Ar}$)이고, y에 대해서도 마찬가지이다.
- 수치적으로, 급수를 60개 항까지 더한 값은 $\mathbf{I}\cosh t + \mathbf{A}\sinh t$와 일치하고, $\alpha = 1$, $\beta = 0$일 때 연립방정식을 룽게-쿠타(Runge–Kutta) 방법으로 풀면 $x(2) \approx 14.6428$을 얻어 $\cosh 2 + 3\sinh 2$와 일치한다.

흔한 실수

- $\mathbf{F}$를 오른쪽에 곱하거나, 여기서 왜 그래도 되는지 밝히지 않고 $\mathbf{AF}$와 $\mathbf{FA}$를 바꾸어 쓰는 것($\mathbf{F}$가 $\mathbf{I}$와 $\mathbf{A}$의 일차결합이므로 둘은 교환한다).
- 급수를 나눌 때 $\mathbf{I}$ 항($n = 0$인 항)을 빠뜨려 $\cosh t$의 상수항 1을 잃는 것.
- $-\mathbf{A}$를 $(\alpha, \beta)^{\mathrm{T}}$에 곱할 때 부호를 틀리는 것.

STEP 너머

행렬 $\mathbf{F}$는 행렬 지수함수(matrix exponential) $\mathrm{e}^{t\mathbf{A}}$이며, 여기서 쓴 방법은 $\mathbf{r}' = \mathbf{Mr}$의 해가 항상 $\mathbf{r} = \mathrm{e}^{t\mathbf{M}}\mathbf{r}(0)$임을 보여 준다. 이 문제에서는 $\mathbf{M} = -\mathbf{A}$이고, 그래서 답에 $\mathbf{F}^{-1} = \mathrm{e}^{-t\mathbf{A}}$가 나타난다. 일반적으로 $\mathrm{e}^{t\mathbf{M}}$은 $\mathbf{M}$을 대각화(diagonalisation)하여 계산한다. 이 문제의 $\mathbf{A}$는 고윳값(eigenvalue) ± 1을 가지며($\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$가 말해 주는 것이 바로 이것이다), 여기서 $\mathrm{e}^{\pm t}$가 나오고, 따라서 cosh와 sinh가 나온다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)에는 행렬 지수함수와 연립 미분방정식을 다루는 좋은 장이 있고, Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 선형 연립방정식을 자세히 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.