풀이

STEP II 1989, 문제 8

순수수학 • 변환의 군

> **STEP II 1989, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q8

핵심 아이디어

모든 것은 하나의 항등식(identity) $\Omega^3 = -1$에 달려 있다. 이로부터 Ω는 첫 줄의 이차방정식(quadratic equation)을 만족하고, 그 덕분에 Ω의 어떤 거듭제곱이든 Ω에 대한 일차식으로 줄일 수 있다. R와 T가 네 점을 어떻게 뒤섞는지 알고 나면, 개수 세기는 공식이 아니라 네 점에 관한 문제가 된다. 군(group)은 z_0을 네 점 각각으로 옮길 수 있어야 하고, 이미 z_0을 그대로 두는 서로 다른 세 사상을 포함하고 있다. 마지막 부분에서는 R와 T가 어떤 종류의 치환(permutation)인지 생각해 보자.

풀이

항등식

$\Omega = e^{i\pi/3}$이므로 $\Omega^3 = e^{i\pi} = -1$이고, 따라서

$$0 = \Omega^3 + 1 = (\Omega + 1)(\Omega^2 - \Omega + 1).$$

$\Omega \neq -1$이므로 두 번째 인수가 0이 된다. 즉 요구한 대로 $\Omega^2 - \Omega + 1 = 0$이다.

이 식을 다음과 같은 형태로 사용할 것이다.

$$\Omega^2 = \Omega - 1, \qquad \Omega^3 = -1, \qquad \Omega^4 = -\Omega.$$

또한 $2\Omega - 1 = 2\cos\frac{\pi}{3} - 1 + 2i\sin\frac{\pi}{3} = i\sqrt{3} \neq 0$임에 주의하자.

R와 T는 네 점을 치환한다

R의 경우, $\Omega^2 = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$를 곱하는 것은 0을 중심으로 한 120° 회전이다.

$$R(0) = 0, \qquad R(1) = \Omega^2, \qquad R(\Omega^2) = \Omega^4 = -\Omega, \qquad R(-\Omega) = -\Omega^3 = 1.$$

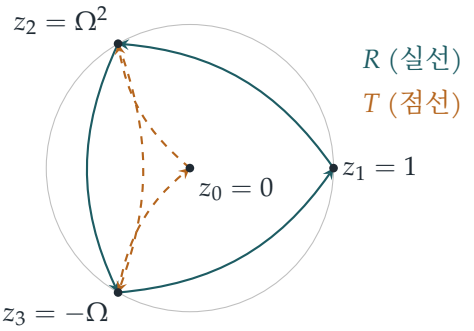
따라서 R는 z_0을 고정하고 $z_1 \to z_2 \to z_3 \to z_1$로 보낸다.

T의 경우, 각 점을 대입한 뒤 $\Omega^2 = \Omega - 1$을 이용해 정리한다.

$$\begin{aligned}
T(0) &= \frac{\Omega^2}{1} = z_2, \\
T(1) &= \frac{\Omega + \Omega^2}{2\Omega^2 + 1} = \frac{2\Omega - 1}{2\Omega - 1} = 1 = z_1, \\
T(\Omega^2) &= \frac{\Omega^3 + \Omega^2}{2\Omega^4 + 1} = \frac{\Omega - 2}{1 - 2\Omega} = -\Omega = z_3, \\
T(-\Omega) &= \frac{-\Omega^2 + \Omega^2}{-2\Omega^3 + 1} = \frac{0}{3} = 0 = z_0.
\end{aligned}$$

셋째 줄에서 $\Omega^3 + \Omega^2 = -1 + (\Omega - 1) = \Omega - 2$이고, 마지막 단계는 $-\Omega(1 - 2\Omega) = -\Omega + 2\Omega^2 = -\Omega + 2\Omega - 2 = \Omega - 2$이기 때문에 성립한다. 분모는 모두 0이 아니다(각각 $1, \mathrm{i}\sqrt{3}, -\mathrm{i}\sqrt{3}, 3$이다).

따라서 T는 z_1을 고정하고 $z_0 \to z_2 \to z_3 \to z_0$로 보낸다. R와 T 모두 네 점을 치환하며, 각각은 3-순환(3-cycle)이다.



군의 위수는 적어도 12이다

G를 R와 T를 포함하는 가장 작은 변환(transformation)의 군이라 하자. 즉 R, T와 그 역변환(inverse)들을 합성(composition)하여 만들 수 있는 모든 것이다. R와 T가 집합 $\{z_0, z_1, z_2, z_3\}$을 자기 자신으로 보내므로(그리고 이 유한집합의 전단사(bijection)의 역이므로 그 역변환들도 마찬가지이다), G의 모든 원소는 이 집합을 자기 자신 위로 보낸다.

z_0을 고정하는 세 사상. 집합 $H = \{I, R, R^2\}$는 G에 속하고, 모든 원소가 z_0을 고정하며, 세 원소는 서로 다른 변환이다(0°, 120°, 240° 회전).

z_0을 모든 점으로 보내는 사상. 위에서 구한 순환을 이용하면

$$g_0 = I, \qquad g_1 = R^2T, \qquad g_2 = T, \qquad g_3 = RT$$

는 $g_k(z_0) = z_k$를 만족한다. 예를 들어 $RT(z_0) = R(z_2) = z_3$이고 $R^2T(z_0) = R^2(z_2) = R(z_3) = z_1$이다.

이제 $k \in \{0,1,2,3\}$, $h \in H$에 대한 열두 개의 곱 g_kh를 생각하자. $h(z_0) = z_0$이므로 $g_kh(z_0) = z_k$이다.

생각해 보기 이 열두 개의 곱 중 두 개가 같은 변환일 수 있을까?

그럴 수 없다. $g_kh = g_lh'$이면 양변을 z_0에 적용하여 $z_k = z_l$, 즉 $k = l$을 얻는다. 그러면 왼쪽에서 g_k^{-1}를 합성하여 $h = h'$을 얻는다. 따라서 열두 개의 곱은 G의 서로 다른 원소이고, $|G| \geq 12$이다. (군론의 언어로 말하면, z_0의 궤도(orbit)의 크기는 4이고 그 안정자(stabiliser)의 크기는 적어도 3이므로, 궤도-안정자 정리(orbit–stabiliser theorem)에 의해 $|G| \geq 4 \times 3$이다.)

마지막 부분

그렇다. 네 점의 24가지 치환 중 정확히 절반은 결코 만들어질 수 없다.

생각해 보기 치환으로서 R와 T의 공통점은 무엇인가?

각각은 3-순환이고, 3-순환은 **짝치환**(*even permutation*)이다. 예를 들어 $(z_1\,z_2\,z_3) = (z_1\,z_3)(z_1\,z_2)$로, 두 호환(transposition)의 곱이다. 이들의 역도 3-순환이다. 짝치환의 합성은 짝치환이므로, R와 T로 만들어지는 점들의 치환은 모두 짝치환이다. 네 대상의 짝치환은 12개뿐이므로, 나머지 12개, 즉 홀치환은 결코 만들어지지 않는다. 예를 들어 z_2와 z_3을 고정하면서 z_0과 z_1을 맞바꾸는 것은 하나의 호환이므로 홀치환이고, 따라서 얻을 수 없다.

사실 앞의 결과와 합치면 G를 정확히 결정할 수 있다. R와 T는 뫼비우스 변환(Möbius map)이고(T는 $ad - bc = \Omega - 2\Omega^4 = 3\Omega \neq 0$이다), 세 점을 고정하는 뫼비우스 변환은 항등변환이므로, G의 각 원소는 네 점을 어떻게 치환하는지에 의해 결정된다. 따라서 $|G| \leq 12$이고, 앞의 결과와 함께 $|G| = 12$이다. 즉 G는 네 점 위에 짝치환 전체의 군 A_4로 작용한다.

검산

- 수치적으로 $|\Omega^2 - \Omega + 1| \approx 2 \times 10^{-16}$이고, 네 점에서 R와 T의 값을 계산하면 정확히 위의 두 3-순환이 나온다.
- $R^3 = I$는 자명하다. 그리고 3-순환이라면 당연히 그래야 하듯 $T^3 = I$이기도 하다(임의

의 점에서 10^{-16} 정밀도로 확인하였다).

- 컴퓨터로 R와 T의 모든 합성을 생성하면 정확히 12개의 서로 다른 사상이 나오며, 모두 짝치환을 유도하고, z_0은 네 점 모두로 옮겨지며, z_0을 고정하는 사상은 3개이다.

흔한 실수

- "G가 위수(order) 3인 원소를 포함하므로 $|G| \geq 12$이다"라고 논증하는 것. 위수 3인 원소만으로는 3이 $|G|$를 나눈다는 사실밖에 얻지 못한다. 인수 4를 주는 것은 네 점 위에서의 추이성(transitivity)이다.
- Ω의 거듭제곱을 정리하지 않고 두어서 $T(\Omega^2) = -\Omega$가 틀린 것처럼 보이는 것. 먼저 모든 것을 $a + b\Omega$ 꼴로 줄이자.

STEP 너머

$|G| =$ (궤도의 크기) $\times$ (안정자의 크기)라는 개수 세기는 궤도-안정자 정리이고, 짝치환들은 교대군(alternating group) A_4를 이루며, 이는 정사면체(regular tetrahedron)의 회전군이기도 하다. 여기서 이런 일이 일어나는 데에는 멋진 이유가 있다. 뫼비우스 변환은 네 점의 복비(cross-ratio)를 보존하는데, 이 네 점의 복비는 $e^{-i\pi/3}$로, 정확히 짝치환만이 이를 보존하는 특별한 "등비조화(equianharmonic)" 값이다. 군과 군의 작용에 대해서는 Allenby, *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)를, 뫼비우스 변환과 리만 구(Riemann sphere)에 대해서는 Needham, *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)를 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.