풀이

STEP II 1989, 문제 7

순수수학 • 2계 미분방정식

> **STEP II 1989, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q7

핵심 아이디어

$x\,y''$ 항과 $-b\,y'$ 항은 함께 있으면 다루기 어색해 보이지만, 독립변수(independent variable)를 $t = x^{\alpha}$로 바꾸면 y''에서 1계 도함수 항이 생겨나고, 이 항이 $-b\,y'$를 정확히 상쇄하도록 만들 수 있다. 그렇게 되도록 α를 고르면 t에 대한 단순 조화 운동(simple harmonic motion)만 남는다. 그다음 $x \to 0$일 때의 거동은 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$에 들어 있는 인수 x^{b}가 어떻게 행동하느냐에 달려 있고, 이는 b의 부호에 따라 달라진다.

풀이

변수 바꾸기

α는 나중에 정하기로 하고 $t = x^{\alpha}$로 놓은 뒤, y를 t의 함수로 본다. $\dot{y} = \mathrm{d}y/\mathrm{d}t$라 하면 연쇄법칙(chain rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \alpha x^{\alpha-1}\dot{y},$$
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}\dot{y} + \alpha^2 x^{2\alpha-2}\ddot{y},$$

이다. 여기서 둘째 줄은 곱의 미분법(product rule)과 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dot{y} = \alpha x^{\alpha-1}\ddot{y}$를 이용한 것이다. 이를 대입하면

$$x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \alpha^2 x^{2\alpha-1}\ddot{y} + \alpha(\alpha-1-b)\,x^{\alpha-1}\dot{y}.$$

$\alpha = b+1$로 고르면 $\dot{y}$ 항이 사라지고, $b > -1$이므로 이 값은 0이 아니다. 그러면 $2\alpha - 1 = 2b+1$이므로 방정식은

$$(b+1)^2 x^{2b+1}\ddot{y} + x^{2b+1}y = 0 \quad\Longrightarrow\quad \ddot{y} + \frac{y}{(b+1)^2} = 0,$$

이 된다. 여기서 $x^{2b+1} \neq 0$으로 나누었다($x > 0$이다). 이것은 각진동수(angular frequency)가 $1/(b+1)$인 t에 대한 단순 조화 운동이므로

$$\boxed{y = A\cos\left(\frac{x^{b+1}}{b+1}\right) + B\sin\left(\frac{x^{b+1}}{b+1}\right)}$$

이고, A, B는 임의의 상수이다. 2계 방정식(second-order equation)에 상수가 두 개 있으므로, 이것이 일반해(general solution)이다.

$x \to 0$일 때의 거동

$u = x^{b+1}/(b+1)$로 쓰자. $b+1 > 0$이므로 $x \to 0^+$일 때 $u \to 0^+$이고, 따라서

$$y \to A\cos 0 + B\sin 0 = A.$$

그러므로 $y \to 1$이려면 $A = 1$이어야 한다. $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x = x^b$를 이용하여 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^b(-\sin u + B\cos u) \qquad (A = 1).$$

$b > 0$인 경우. 이때 $x^b \to 0$이고, 괄호 안은 유한한 값 B로 수렴한다. 따라서 **B의 값에 관계없이** $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x \to 0$이다. 다음 해족의 모든 원소

$$y = \cos\left(\frac{x^{b+1}}{b+1}\right) + B\sin\left(\frac{x^{b+1}}{b+1}\right), \qquad B \in \mathbb{R},$$

가 두 조건을 모두 만족한다. 문제에서 요구한 대로, 해는 존재하지만 유일하지 않다.

> ? **생각해 보기** 보통의 2계 방정식에서는 y의 값 하나와 y'의 값 하나가 해를 결정한다. 여기서는 왜 그렇지 않은가?

유일성 정리(uniqueness theorem)는 방정식이 $y'' = f(x, y, y')$ 꼴이고 f가 충분히 좋은 함수일 것을 요구한다. x로 나누면 $y'' = (b/x)\,y' - x^{2b}y$가 되는데, 계수 b/x는 $x = 0$에서 발산한다. 점 $x = 0$은 **특이점**(*singular point*)이므로, 그곳에서는 통상적인 보장이 적용되지 않는다.

$b = 0$인 경우. 이때 $x^b = 1$이고 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x \to B$이다. 조건에 의해 $B = 0$이어야 하므로 유일한 해 $y = \cos x$를 얻는다. (이는 그냥 $y'' + y = 0$이다.)

$-1 < b < 0$인 경우. 이때 $x^b \to \infty$이다. $B \neq 0$이면 $Bx^b\cos u \to \pm\infty$인 반면, 다른 항은 작다. $\sin u \leq u$이므로

$$|x^b \sin u| \leq x^b \cdot \frac{x^{b+1}}{b+1} = \frac{x^{2b+1}}{b+1}.$$

더 정확히는 $\sin u/u \to 1$이므로 $x^b \sin u \sim x^{2b+1}/(b+1)$이다. 따라서 $B = 0$이어야 하고, 그러면

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -x^b \sin u \sim -\frac{x^{2b+1}}{b+1}.$$

이것은 $2b+1>0$, 즉 $b>-\frac{1}{2}$일 때, 그리고 그때에만 0으로 수렴한다. $b=-\frac{1}{2}$이면 -2로 수렴하고, $b<-\frac{1}{2}$이면 유계가 아니다. 따라서 $-\frac{1}{2}<b<0$이면 해는 $y=\cos(x^{b+1}/(b+1))$ 하나뿐이고, $-1<b\le-\frac{1}{2}$이면 해가 없다.

결론

조건이 유일한 해를 결정하는 것은 정확히

$$-\tfrac{1}{2}<b\le 0,$$

일 때이고, 그 해는 $y=\cos(x^{b+1}/(b+1))$이다.



검산

- $b=0$이면 $y''+y=0$이 되고, 그 해 $A\cos x+B\sin x$는 공식과 일치한다.
- 수치적으로, 일반해는 반올림 오차 범위 안에서 방정식을 만족한다(임의의 x, b, A, B에서 유한 차분(finite differences)으로 확인). $b=-\frac{1}{4}$, $B=0$일 때 $x=10^{-9}$에서 $y'\approx-4.2\times10^{-5}$였고, 0으로 수렴해 갔다. $b=-\frac{1}{2}$이면 값이 -2에 머물고, $b=1$, $B=5$이면 $x=10^{-9}$에서 5×10^{-9}이다.

흔한 실수

- "$b\le0$이면 유일하다"에서 멈추는 것: $-1<b\le-\frac{1}{2}$이면 코사인 해조차 $y'\not\to0$이므로, 해가 아예 없다.
- $\alpha x^{\alpha-1}\dot{y}$를 x에 대해 미분할 때 곱의 미분법을 잊는 것. 추가로 생기는 항이 바로 $-b\,y'$를 상쇄하는 항이다.

STEP 너머

점 $x=0$은 이 방정식의 **정칙 특이점**(*regular singular point*)이다. 이런 점 근처에서 프로베니우스(Frobenius) 방법은 $x^r\sum c_nx^n$ 꼴의 해를 찾으며, 여기서 결정방정식(indicial equation)의 근은 $r=0$과 $r=b+1$이다. 특이점에서 어떤 조건이 해를 확정하는지는 이 지수들에 따라 달라지며, 이는 우리가 본 그대로이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary*

Differential Equations(미분방정식 입문서)가 급수해(series solution)와 정칙 특이점을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.