풀이

STEP II 1989, 문제 6

순수수학 • 역함수의 적분

> **STEP II 1989, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q6

핵심 아이디어

우변에는 g를 y에 대해 적분한 것이 들어 있으므로, 자연스러운 방법은 좌변의 적분을 $y = \mathrm{f}(x)$로 다시 쓰는 것, 즉 $x = \mathrm{g}(y)$로 치환(substitution)하는 것이다. 새로운 피적분함수(integrand)에는 $y\,\mathrm{g}'(y)$가 들어 있는데, 이는 부분적분(integration by parts)을 하라고 외치는 꼴이며, 경계항(boundary terms)이 직사각형들을 만들어 낸다. 두 번째 공식도 정확히 같은 방식으로 풀리는데, x가 $x^2/2$로, 넓이가 y축을 중심으로 한 회전체의 부피(volume of revolution)로 바뀔 뿐이다.

풀이

첫 번째 공식

$[a, b]$에서 $\mathrm{f}'(x) > 0$이므로 f는 그 구간에서 순증가(strictly increasing)하고, 따라서 $[a, b]$에서 $[\alpha, \beta]$ 위로의 전단사(bijection)이며 역함수(inverse function) $\mathrm{g}\colon [\alpha, \beta] \to [a, b]$가 존재한다. 또한 g는 미분가능(differentiable)하며

$$\mathrm{g}'(y) = \frac{1}{\mathrm{f}'(\mathrm{g}(y))},$$

이다. f'이 결코 0이 되지 않으므로 이 식은 의미가 있다.

$x = \mathrm{g}(y)$로 치환하면 $\mathrm{f}(x) = y$이고 $\mathrm{d}x = \mathrm{g}'(y)\,\mathrm{d}y$이다. $x = a$일 때 $y = \mathrm{f}(a) = \alpha$이고, $x = b$일 때 $y = \beta$이다. 따라서

$$\int_a^b \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta y\,\mathrm{g}'(y)\,\mathrm{d}y.$$

이제 $u = y$, $\mathrm{d}v = \mathrm{g}'(y)\,\mathrm{d}y$로 두고 부분적분하면 $v = \mathrm{g}(y)$이므로 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta y\,\mathrm{g}'(y)\,\mathrm{d}y &= \Big[y\,\mathrm{g}(y)\Big]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \mathrm{g}(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \beta\,\mathrm{g}(\beta) - \alpha\,\mathrm{g}(\alpha) - \int_\alpha^\beta \mathrm{g}(y)\,\mathrm{d}y \\ &= b\beta - a\alpha - \int_\alpha^\beta \mathrm{g}(y)\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

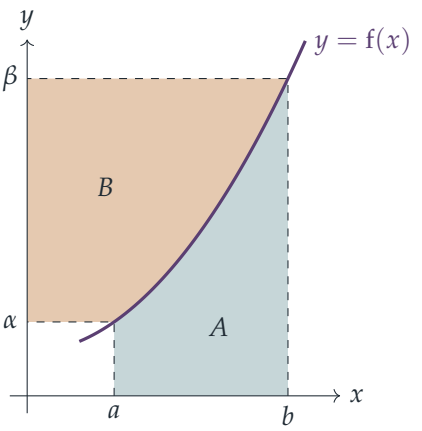
여기서 마지막 등호는 $\mathrm{g}(\beta) = b$이고 $\mathrm{g}(\alpha) = a$이기 때문이다. 이것이 구하는 공식이다.

기하학적 의미

$a > 0, \alpha > 0$이라 하자. f가 증가함수이므로 $0 < a < b$이고 $0 < \alpha < \beta$이며, 따라서 (a, α)에서 (b, β)까지의 $y = \mathrm{f}(x)$의 호는 제1사분면에 놓인다. 공식을 다음과 같이 쓰자.

$$\underbrace{\int_a^b \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{넓이}A} + \underbrace{\int_\alpha^\beta \mathrm{g}(y)\,\mathrm{d}y}_{\text{넓이}B} = b\beta - a\alpha.$$

여기서 A는 $a \le x \le b$에서 곡선과 x축 사이의 넓이이고, B는 $\alpha \le y \le \beta$에서 곡선과 y축 사이의 넓이이다(곡선을 옆에서 본 $x = \mathrm{g}(y)$로 생각한다). 둘을 합치면 직사각형 $[0, b] \times [0, \beta]$에서 작은 직사각형 $[0, a] \times [0, \alpha]$를 뺀 영역을 채우며, 이 L자 모양 영역의 넓이는 $b\beta - a\alpha$이다.



두 번째 공식

같은 치환 $x = \mathrm{g}(y)$, $\mathrm{d}x = \mathrm{g}'(y)\,\mathrm{d}y$를 쓰면

$$2\pi \int_a^b x\,\mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_\alpha^\beta y\,\mathrm{g}(y)\,\mathrm{g}'(y)\,\mathrm{d}y.$$

? 생각해 보기 이번에는 어느 인수를 적분해야 할까?

연쇄법칙(chain rule)에 의해 $g(y)\,g'(y)$는 $\frac{1}{2}[g(y)]^2$의 도함수임에 주목하자. 그러므로 $u = y$, $v = \frac{1}{2}[g(y)]^2$로 두고 부분적분하면

$$\begin{aligned} 2\pi \int_\alpha^\beta y\,g(y)\,g'(y)\,\mathrm{d}y &= 2\pi \left(\left[\tfrac{1}{2} y\,[g(y)]^2\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \tfrac{1}{2}[g(y)]^2\,\mathrm{d}y \right) \\ &= \pi(\beta b^2 - \alpha a^2) - \pi \int_\alpha^\beta [g(y)]^2\,\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

이며, 여기서도 $g(\beta) = b$와 $g(\alpha) = a$를 이용하였다. 이것이 두 번째 공식이다.

두 번째 공식의 기하학적 의미

이번에도 $a > 0$, $\alpha > 0$이라 하고, 위의 그림을 y축을 중심으로 한 바퀴 회전시키자.

- 영역 A가 휩쓸고 지나가며 만드는 입체의 부피는 원통껍질법(method of cylindrical shells)에 의해 $2\pi \int_a^b x\,f(x)\,\mathrm{d}x$이다. 축에서 거리 x만큼 떨어져 있고 높이가 $f(x)$, 폭이 $\mathrm{d}x$인 가는 띠는 부피가 약 $2\pi x\,f(x)\,\mathrm{d}x$인 원통껍질이 된다.
- 영역 B가 휩쓸고 지나가며 만드는 입체의 부피는 원판법(method of discs)에 의해 $\pi \int_\alpha^\beta [g(y)]^2\,\mathrm{d}y$이다. 높이 y에 있는 띠는 반지름이 $g(y)$인 원판이 된다.
- 두 입체를 합치면 반지름 b, 높이 β인 원기둥에서 그 밑면으로부터 반지름 a, 높이 α인 같은 축의 원기둥을 뺀 입체를 채우며, 그 부피는 $\pi b^2\beta - \pi a^2\alpha$이다.

따라서 이 공식은 원통껍질법으로 구한 부피와 원판법으로 구한 부피의 합이 두 원기둥의 부피의 차와 같다는 것을 말해 준다. 조건 $a > 0$과 $\alpha > 0$은 두 영역이 모두 축의 한쪽에, 그리고 x축 위쪽에 놓이도록 보장한다. 그래서 적분이 실제로 부피를 나타내고 두 입체가 겹치지 않는다.

검산

$f(x) = x^2$을 $[1,2]$에서 시험해 보자. 그러면 $\alpha = 1$, $\beta = 4$이고 $g(y) = \sqrt{y}$이다. 첫 번째 공식의 좌변은 $\frac{7}{3}$, 우변은 $8 - 1 - \frac{2}{3}(8-1) = \frac{7}{3}$이다. 두 번째 공식의 좌변은 $2\pi \cdot \frac{15}{4} = \frac{15\pi}{2}$, 우변은 $\pi(16-1) - \pi \cdot \frac{15}{2} = \frac{15\pi}{2}$이다. 또한 g를 이분법(bisection)으로 구하고 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 수치 계산하여, $[\frac{1}{2}, 2]$에서의 $x^3 + x$를 포함한 여러 함수에 대해 두 공식을 모두 확인하였다. 이 경우 첫 번째 공식의 양변은 모두 5.859375이다.

흔한 실수

- 적분 구간을 바꾸는 것을 잊는다. $x = g(y)$로 치환한 뒤에는 적분 구간의 끝이 a와 b가 아니라 α와 β가 된다.
- g가 존재하고 미분가능한 이유를 밝히지 않는다. 조건 $f' > 0$은 바로 이를 위해 주어진 것이다.
- 영역 B를 곡선 아래에 놓인 영역으로 묘사한다. 이 영역은 곡선과 y축 사이에 놓여 있다.

STEP 너머

첫 번째 공식은 f와 f^{-1}의 그래프가 $y = x$에 대해 서로 대칭이라는 사실을 적분으로 표현한 것이다. 이것은 영 부등식(Young's inequality), 즉 $f(0) = 0$인 증가함수 f와 $a, b \geq 0$에 대해 $ab \leq \int_0^a f + \int_0^b f^{-1}$가 성립한다는 부등식의 바탕이 되는 아이디어이며, 볼록 해석(convex analysis)과 해밀턴 역학(Hamiltonian mechanics)에서 쓰이는 르장드르 변환(Legendre transform)의 바탕이기도 하다. 또한 arcsin이나 ln 같은 역함수의 적분을 기발한 치환 없이 구하는 방법이기도 하다. 치환과 역함수에 대한 엄밀한 설명은 Abbott, *Understanding Analysis*를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.