풀이

STEP II 1989, 문제 5

순수수학 • 극곡선과 반사

> **STEP II 1989, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q5

핵심 아이디어

소문항 (i)은 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$에 대하여 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = (\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta)/(\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta)$를 계산하는 것일 뿐이다. 거울에 대해서는 O를 중심으로 하는 극좌표(polar coordinates)를 쓰는 것이 자연스럽다. 반사된 광선이 언제나 반지름을 따라 극으로 되돌아오기 때문이다. 그러면 반사의 법칙(law of reflection)에 의해 각 점에서의 법선(normal)의 방향을 θ만으로 나타낼 수 있고, 소문항 (i)을 이용하면 이것이 $r(\theta)$에 대한 변수분리형(separable) 일계 미분방정식(first-order differential equation)이 된다.

풀이

소문항 (i)

극좌표가 (r,θ)인 점의 직교좌표는 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$이다. 곡선 $r = r(\theta)$ 위에서는 두 좌표가 모두 θ의 함수이고, 곱의 미분법(product rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\cos\theta - r\sin\theta, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta + r\cos\theta.$$

이다. (매개변수로 나타낸 곡선(parametrised curve)에 대한) 연쇄법칙(chain rule)에 의해, $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta \neq 0$인 곳에서는

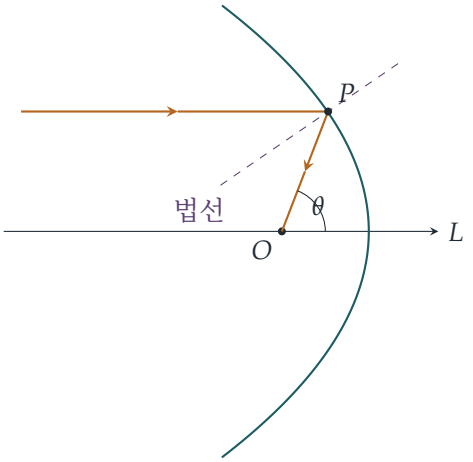
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta + r\cos\theta}{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\cos\theta - r\sin\theta} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\tan\theta + r}{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} - r\tan\theta},$$

이다. 마지막 단계에서는 분자와 분모를 $\cos\theta$로 나누었는데, 이는 $\cos\theta \neq 0$일 때 가능하다. 이것이 구하는 공식이다.

소문항 (ii)

평면곡선으로 줄이기. L을 포함하는 임의의 평면 Π와, Π 위에 있는 거울 위의 점 P를 잡자. P를 지나고 L에 평행한 광선은 Π 안에 있고, O도 Π 안에 있다. 따라서 반사광선(reflected ray) PO도 Π 안에 있다. P에서의 법선은 Π 안의 두 직선이 이루는 각을 이등분하므로 역시 Π 안에 있다. 거울과 Π가 만나서 생기는 곡선 C의 P에서의 접선은 Π와 거울의 접평면(tangent plane)에 동시에 들어 있으므로 법선에 수직이다. 따라서 평면 Π 안에서, P에서의 C의 법선은 입사광선(incident ray)과 반사광선이 이루는 각을 이등분한다. 즉 문제는 2차원 문제가 된다.

좌표. Π에서 극을 O로, 시초선을 L 방향으로 잡은 극좌표를 쓰되, 들어오는 광선이 $\theta = 0$ 방향으로 진행하도록 방향을 정한다(그림에서처럼, 광선은 거울의 열린 쪽 너머에 있는 L의 쪽에서 들어온다). $P = (r, \theta)$가 C 위의 점이라 하자.



법선의 방향. P에서 보면 입사광선은 $(-1, 0)$ 방향으로 되돌아가고, 반사광선은 $(-\cos\theta, -\sin\theta)$ 방향으로 O를 향한다. 둘 다 단위벡터(unit vector)이므로 그 합은 두 벡터가 이루는 각의 이등분선(bisector) 방향, 즉 법선 방향을 가리킨다.

$$(-1-\cos\theta, -\sin\theta) = -2\cos\tfrac{\theta}{2}\,(\cos\tfrac{\theta}{2}, \sin\tfrac{\theta}{2}),$$

여기서 $1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$와 $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$를 이용하였다. 따라서 P에서의 법선은 L과 각 $\frac{\theta}{2}$를 이루고, 접선은 이에 수직이므로 P에서 C의 기울기(gradient)는

$$m = -\cot\tfrac{\theta}{2}.$$

이다.

미분방정식. $r' = \mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$, $t = \tan\theta$, $\tau = \tan\frac{\theta}{2}$라 두면 $t = \dfrac{2\tau}{1-\tau^2}$이고 $m = -\dfrac{1}{\tau}$이다. 소문항 (i)에 의해

$$\frac{r't + r}{r' - rt} = m \quad\Longrightarrow\quad r'(t-m) = -r(1+mt) \quad\Longrightarrow\quad \frac{r'}{r} = -\frac{1+mt}{t-m}.$$

이다. 그런데

$$1+mt = 1-\frac{2}{1-\tau^2} = -\frac{1+\tau^2}{1-\tau^2}, \qquad t-m = \frac{2\tau}{1-\tau^2}+\frac{1}{\tau} = \frac{1+\tau^2}{\tau(1-\tau^2)},$$

이므로

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \tan\tfrac{\theta}{2}.$$

이다.

생각해 보기 소문항 (i)은 $\cos\theta = 0$인 곳에서 성립하지 않는다. 그렇다면 빈틈이 생기지 않는가?

그렇지 않다. 방정식 $r'/r = \tan\frac{\theta}{2}$는 $-\pi < \theta < \pi$에서 θ의 연속함수만을 포함한다. 이 식은 고립된 값 $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$(그리고 접선이 수직이 되는 고립된 점들)를 제외한 모든 점에서 성립하므로, r'의 연속성에 의해 그 점들에서도 성립한다. (또 다른 방법으로, 반지름과 접선이 이루는 각 ψ는 $\tan\psi = r/r'$를 만족하고, 기하학적으로 곧바로 $\psi = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$를 얻을 수 있으며, 이 경우에는 예외인 점이 없다.)

풀기. $-\pi < \theta < \pi$에서 $\cos\frac{\theta}{2} > 0$임에 유의하여 적분하면

$$\ln r = \int \tan\tfrac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = -2\ln\cos\tfrac{\theta}{2} + \text{상수}, \qquad \text{따라서} \qquad r = \frac{k}{\cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{2k}{1+\cos\theta}$$

이고, 여기서 $k > 0$은 상수이다($r > 0$이므로). $\ell = 2k$라 두자. 그러면 $r + r\cos\theta = \ell$, 즉 $r = \ell - x$이다. $r^2 = x^2 + y^2$를 이용하여 양변을 제곱하면

$$x^2 + y^2 = (\ell - x)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad y^2 = \ell^2 - 2\ell x.$$

이다. 이것은 축(axis)이 L이고 초점(focus)이 O인 포물선(parabola)이다($X = \frac{\ell}{2} - x$, $a = \frac{\ell}{2}$로 두면 $Y^2 = 4aX$ 꼴이므로 초점은 $x = \frac{\ell}{2} - a = 0$에 있다). Π는 L을 포함하는 임의의 평면이었으므로, 거울은 그러한 모든 평면과 포물선에서 만난다. 이것으로 증명이 끝난다. (사실 상수 ℓ이 모든 평면에서 같은 것은 거울이 하나의 회전포물면(paraboloid of revolution)일 때뿐이지만, 이 문제에서는 그것까지 필요하지 않다.)

검산

- $\theta = 0$일 때 $r = \frac{\ell}{2}$이다. 즉 꼭짓점(vertex)은 O와 준선(directrix) $x = \ell$의 한가운데에 있으며, 초점이 O인 포물선이라면 당연히 그래야 한다.
- $\ell = 2$, $\theta = \frac{\pi}{2}$일 때 점은 $P = (0,2)$이고, 이 점에서 $y^2 = 4 - 4x$의 기울기는 $-1 = -\cot\frac{\pi}{4}$이다. 방향 $(1,0)$을 이 접선에 대하여 반사하면 $(0,-1)$이 되어 곧장 아래로 O를 향한다.

- 수치적 검산: (i)의 기울기 공식은 무작위로 만든 곡선 2000개에서 유한차분(finite differences)과 (10^{-8}까지) 일치하였다. $r(0) = 1.35$에서 시작하여 $r' = r\tan\frac{\theta}{2}$를 룽게-쿠타(Runge–Kutta) 방법으로 풀면 $r(2.5) = 13.5776380$을 얻었고, 이는 $2.7/(1+\cos 2.5)$와 일치하였다. 또 L에 평행한 광선을 $y^2 = \ell^2 - 2\ell x$ 위의 무작위 점 1000개에서 반사시켰더니 모두 O를 지났다.

흔한 실수

- 이등분선을 잘못 잡는 것: 광선을 따라 P에서 **멀어지는** 방향의 두 단위벡터의 합이 법선을 주고, 그 차는 접선을 준다.
- 문제가 왜 평면 문제가 되는지 설명하지 않는 것: L을 지나는 평면은 입사광선과 O를 포함하므로 반사광선과 법선도 포함한다.
- 적분상수 없이 $\ln r = -2\ln\cos\frac{\theta}{2}$라고 쓰는 것: 이렇게 하면 포물선족 전체를 잃어버린다.

STEP 너머

방정식 $r(1+\cos\theta) = \ell$은 초점이 극에 있고 이심률(eccentricity)이 1인 원뿔곡선(conic)의 극방정식이다. 1을 e로 바꾸면 타원(ellipse)과 쌍곡선(hyperbola)을 얻는데, 이것이 바로 뉴턴(Newton)의 운동방정식을 극좌표로 풀 때 행성의 궤도가 나타나는 방식이다. 위의 반사 논증은 위성 안테나와 자동차 전조등이 회전포물면 모양인 이유이기도 하다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)에서는 원뿔곡선 궤도를 이와 같은 방법으로 유도한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.