풀이

STEP II 1989, 문제 4

순수수학 • 유리함수의 그래프 그리기

> **STEP II 1989, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q4

핵심 아이디어

일차식들의 곱이나 몫은 로그미분(logarithmic differentiation)으로 미분하는 것이 가장 쉽다. 로그를 취하면 곱이 합으로 바뀌기 때문이다. 치역(range)을 구할 때는 질문을 거꾸로 던진다. 어떤 z에 대해 $f(x) = z$가 실근을 갖는가? 이 방정식은 x에 대한 이차방정식이므로 답은 판별식(discriminant)에서 나온다. 그래프의 개형은 영점(zeros), 극(poles), $|x|$가 클 때의 거동, 그리고 빠지는 z 값이 있는지 없는지로부터 그려진다.

인쇄된 문제에 대해 한마디 덧붙인다. 조건 $a+d \neq c+d$는 $a \neq c$라는 뜻일 뿐이며, 이는 이미 알고 있는 사실이다. 실제로 쓰이는 조건은 $a+b \neq c+d$이므로, 풀이 전체에서 이를 가정한다.

풀이

도함수

$f(x) \neq 0$인 곳, 즉 ($x \neq c, d$일 뿐 아니라) $x \neq a, b$인 곳에서는 절댓값에 로그를 취할 수 있다.

$$\ln|f(x)| = \ln|x-a| + \ln|x-b| - \ln|x-c| - \ln|x-d|.$$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|x-k| = \frac{1}{x-k}$를 이용하여 미분하면 다음을 얻는다.

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-c} - \frac{1}{x-d}.$$

이제 양변에 x를 곱한다. $x \neq 0$일 때 각 항은

$$\frac{x}{x-k} = \frac{1}{1-k/x} = \left(1 - \frac{k}{x}\right)^{-1},$$

이 되므로, 구하는 항등식

$$\frac{x\,\mathrm{f}'(x)}{\mathrm{f}(x)} = \left(1-\frac{a}{x}\right)^{-1} + \left(1-\frac{b}{x}\right)^{-1} - \left(1-\frac{c}{x}\right)^{-1} - \left(1-\frac{d}{x}\right)^{-1}.$$

을 얻는다.

$|x|$가 클 때

$|x|$가 $|k|$보다 훨씬 크면 이항전개(binomial expansion)에 의해 $(1-k/x)^{-1} = 1+\frac{k}{x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right)$이다. 맨 앞의 1 네 개는 서로 소거되어$(1+1-1-1=0)$ 다음이 남는다.

$$\frac{x\,\mathrm{f}'(x)}{\mathrm{f}(x)} = \frac{a+b-c-d}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right), \qquad \text{따라서} \qquad \mathrm{f}'(x) = \frac{\mathrm{f}(x)}{x^2}\left[(a+b-c-d)+O\left(\tfrac{1}{x}\right)\right].$$

$a+b-c-d \neq 0$이므로, $|x|$가 충분히 크면 대괄호 안의 부호는 $a+b-c-d$의 부호와 같다. 또한 $|x| \to \infty$일 때 $\mathrm{f}(x) \to 1$이므로 그곳에서 $\mathrm{f}(x) > 0$이고, $x^2 > 0$이다. 따라서 $|x|$가 클 때, 실수직선의 양 끝 모두에서 $\mathrm{f}'(x)$의 부호는 $a+b-c-d$의 부호와 같다.

곡선이 점근선(asymptote) $y=1$의 어느 쪽에 있는지도 기록해 둘 만하다. 직접 계산하면

$$\mathrm{f}(x)-1 = \frac{(c+d-a-b)x+ab-cd}{(x-c)(x-d)} \approx \frac{c+d-a-b}{x} \quad \text{충분히 큰}|x|,$$

이고, 분자를 보면 $\mathrm{f}(x)=1$이 되는 점은 정확히 하나, $x_0 = \dfrac{cd-ab}{c+d-a-b}$뿐임을 알 수 있다.

치역 조건: 방법

$\mathrm{f}(x)=z$를 $(x-a)(x-b)=z(x-c)(x-d)$로 정리하면 다음 이차방정식이 된다.

$$(1-z)x^2 - (a+b-(c+d)z)x + (ab-cdz) = 0.$$

- 이 방정식의 근은 $x=c$나 $x=d$일 수 없다. 그곳에서 좌변 $(x-a)(x-b)$가 0이 아니기 때문이다. 따라서 이 이차방정식의 실근은 정확히 $\mathrm{f}(x)=z$의 실수해이다.
- $z \neq 1$이면, 판별식 $\Delta(z) = \big(a+b-(c+d)z\big)^2 - 4(1-z)(ab-cdz)$가 ≥ 0일 때, 그리고 그때에만 실근이 존재한다. 전개한 뒤 $(c-d)^2 > 0$을 곱하고 z의 거듭제곱별로 정리한다. $P=(a-c)(b-d)$, $Q=(a-d)(b-c)$라 두면 유용한 항등식은 $P-Q=(a-b)(c-d)$이며, 따라서 상수항 $(a-b)^2(c-d)^2$는 $(P+Q)^2-4PQ$와 같다. 그러면 주어진 부등식은 정확히 $(c-d)^2\Delta(z) \geq 0$이 된다.
- $z=1$이면 방정식은 x의 계수가 $c+d-a-b \neq 0$인 일차방정식이므로 근이 존재한다. 또한 양변의 차가 $(c-d)^2(a+b-c-d)^2 > 0$이므로 부등식도 성립한다.

그래프의 개형

$G(z) = \left[(c-d)^2 z + P + Q\right]^2 - 4PQ$라 하자. z가 변하면 제곱 부분은 $[0, \infty)$의 모든 값을 가지므로, G의 최솟값은 $-4PQ$이다. 그러므로

$$\text{함수f의 치역이 전체 실수 집합}\mathbb{R} \iff PQ \leq 0.$$

이다. $PQ > 0$이면 $G(z) < 0$인 z 값들은 열린구간을 이루며, 이 값들이 바로 빠지는 값이다.

생각해 보기 실제 수치 없이 PQ의 부호를 어떻게 알 수 있을까?

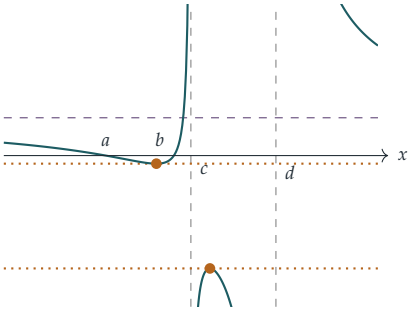
다시 묶으면 $PQ = (a-c)(a-d) \cdot (b-c)(b-d)$이다. $a < c < d$이므로 앞의 쌍은 두 음수의 곱이어서 양수이다. 따라서 PQ의 부호는 $(b-c)(b-d)$의 부호와 같고, 이는 b가 두 극 c와 d 사이에 있을 때 정확히 음수이다. 결국 모든 것은 $c < d$에 대해 b가 어디에 있는지, 그리고 $a+b-c-d$의 부호에 달려 있다.

1. $a < b < c < d$: 이때 $a + b < c + d$는 자동으로 성립한다.
2. $a < c < b < d$: $a < c$이고 $b < d$이므로 역시 $a + b < c + d$이다.
3. $a < c < d < b$이고 $a + b < c + d$.
4. $a < c < d < b$이고 $a + b > c + d$.

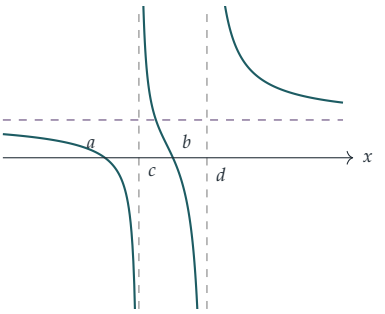
따라서 치역이 $\mathbb{R}$ 전체인 것은 경우 2뿐이다. 경우 1, 3, 4에서는 어떤 구간의 값이 빠진다.

극값을 다룰 때 도구가 하나 더 도움이 된다. f가 x_1에서 정류점(stationary point)을 갖고 $\mathrm{f}(x_1) = z_1$이라면, x_1은 $(x-a)(x-b) - z_1(x-c)(x-d) = 0$의 중근(repeated root)이다. ($z_1 = 1$이면 이 식은 일차식이므로 이런 일은 일어날 수 없다.) 중근을 가진다는 것은 $G(z_1) = 0$이라는 뜻이다. 따라서 정류점에서의 함숫값은 정확히 빠지는 구간의 양 끝값이다. 경우 2에서는 항상 $G > 0$이므로 정류점이 전혀 없다.

각 극의 바로 양옆에서 f의 부호는 음인 인수의 개수를 세어 알 수 있다. 각 그림에서 세로 점선은 극 $x = c$, $x = d$이고, 가로 점선은 점근선 $y = 1$이며, 호박색 점선은 빠지는 구간의 양 끝, 즉 정류점(호박색 점)에서의 함숫값을 나타낸다. 곡선은 특정한 값(각 그림 아래에 표시)으로 그렸지만, 같은 경우에 속하는 모든 선택에서 모양은 같다.



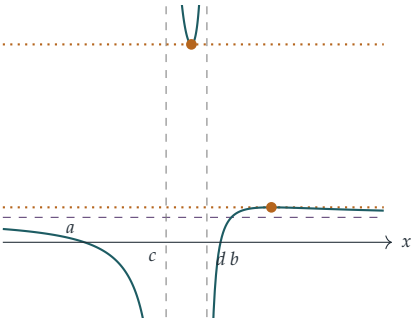
경우 1: $a, b, c, d = -2, 0, \frac{1}{2}, 3$



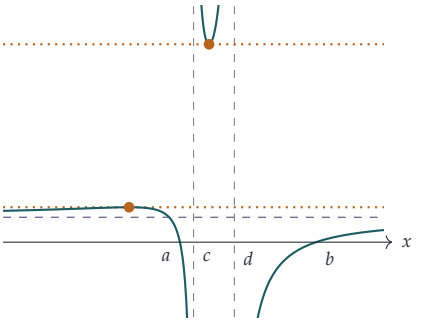
경우 2: $a, b, c, d = -1, 1, 0, 2$

경우 1 ($a < b < c < d$). 이 경우 왼쪽 멀리에서는 $\mathrm{f} < 1$이고 오른쪽 멀리에서는 $\mathrm{f} > 1$이다. $x < c$에서 곡선은 1 바로 아래에서 들어와 a에서 0까지 내려가고, a와 b 사이에서 음의 극솟값까지 내려갔다가, b를 지나 올라가 c에서 $+\infty$로 간다. 두 극 사이에서는 분모의 두 인수의 부호가 서로 반대이고 분자는 양수이므로, 양 끝에서 $\mathrm{f} \to -\infty$이며 그 사이에 음의 극댓값이 있다. d의 오른쪽에서 곡선은 $+\infty$에서 1로 내려간다. (c, d)에서의 극댓값은 (a, b)에서의 극솟값보다 아래에 있으며, 둘 사이에 엄격히 놓인 값들은 빠진다. **치역은 $\mathbb{R}$ 전체가 아니다.**

경우 2 ($a < c < b < d$). 정류점이 없다. 곡선은 1 바로 아래에서 a를 지나 c에서 $-\infty$로 내려간다. 그다음 $+\infty$에서 b를 지나 d에서 $-\infty$로 내려가고, 이어서 $+\infty$에서 1로 내려간다. 가운데 가지 하나만으로도 모든 실숫값을 가진다. **치역은 $\mathbb{R}$ 전체이다.**



경우 3: $a, b, c, d = -3, 2, 0, \frac{3}{2}$



경우 4: $a, b, c, d = -\frac{1}{2}, \frac{9}{2}, 0, \frac{3}{2}$

경우 3 ($a < c < d < b$, $a + b < c + d$). $x < c$에서 곡선은 1 바로 아래에서 a를 지나 $-\infty$로 내려간다. 두 극 사이에서는 분자가 음수이므로 양 끝에서 $\mathrm{f} \to +\infty$이며, 극솟값 m을 가진다. d의 오른쪽에서는 $-\infty$에서 b를 지나 올라가 x_0에서 $y = 1$을 가로지르고, 1보다 조금 큰 극댓값 M에 이른 다음 위에서 1로 다시 내려온다. $1 < M < m$일 때 (M, m)의 값들이 빠진다. **치역은 $\mathbb{R}$ 전체가 아니다.**

경우 4 ($a < c < d < b$, $a + b > c + d$). 이는 바깥쪽 거동이 뒤바뀐 경우 3이다. 왼쪽 멀리에서 f는 1보다 조금 크고 증가한다. 극댓값 $M > 1$에 이른 뒤 $x_0 < a$에서 $y = 1$을 가로지르고, a를 지나 c에서 $-\infty$로 내려간다. 가운데 가지는 앞에서처럼 극솟값 m을 갖는 U자 모양이다. d의 오른쪽에서 곡선은 $-\infty$에서 b를 지나 아래에서 1을 향해 올라간다. 이번에도 (M, m)이 빠진다. **치역은 $\mathbb{R}$ 전체가 아니다.**

검산

- 항등식: 임의의 a, b, c, d, x에서 $xf'(x)/f(x)$를 유한차분(finite-difference)으로 근사한 값은 우변과 약 10^{-9} 이내로 일치한다.
- $a, b, c, d = -2, 0, \frac{1}{2}, 3$인 경우 1: 이때 $P = \frac{15}{2}$, $Q = \frac{5}{2}$, $(c-d)^2 = \frac{25}{4}$이고, $G(z) = 0$에서 $z = -\frac{8}{5} \pm \frac{4}{5}\sqrt{3}$, 즉 약 -0.2144와 -2.9856을 얻는다. 이 값들은 $f'(x) = 0$을 풀어 구한 ($x \approx -0.515$와 $x \approx 1.060$에서의) 정류점의 함숫값과 정확히 같다. 4×10^5개의 점에서 f를 계산해 보아도 두 값 사이에 엄격히 놓이는 값은 하나도 나오지 않는다.
- 경우 3과 4(그림에 쓴 값): 빠지는 구간은 $(1.4007, 7.9327)$이며, 역시 정류점의 함숫값과 일치한다. 경우 2에서 $f'(x) = 0$은 실수해를 갖지 않는다.

흔한 실수

- $f(x) = z$가 이차방정식인 것은 $z \neq 1$일 때뿐임을 잊는 것: $z = 1$인 경우는 따로 한 문장을 써서 다루어야 한다.
- 곡선이 양 끝에서 같은 쪽으로 $y = 1$에 다가간다고 가정하는 것. 그렇지 않다. $f - 1 \approx (c + d - a - b)/x$는 x에 따라 부호가 바뀐다.

STEP 너머

"f의 치역은 무엇인가?"를 "어떤 z에 대해 $f(x) = z$가 해를 갖는가?"로 바꾸는 것은 원상(preimage)의 개념이며, 정류점의 함숫값이 두 해가 합쳐지는 곳이라는 관찰은 임계값(critical values) 이론의 출발점이다. 이와 같은 2차 유리함수(rational function)는 2대1 사상이며, 복소수(complex numbers) 위에서는 그 거동이 훨씬 깔끔해진다. 복소수 위에서는 모든 값이 (중복도(multiplicity)를 세어) 정확히 두 번씩 나타나기 때문이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석)는 이러한 기하학적 관점을 아름답게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.