풀이

STEP II 1989, 문제 3

순수수학 • 복소 쌍곡선 사상

> **STEP II 1989, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q3

핵심 아이디어

우변은 $2\sinh(x+\mathrm{i}y)$이므로, 이 문제 전체는 사상(map) $u+\mathrm{i}v=\sinh(x+\mathrm{i}y)$에 관한 것이다. 합의 sinh를 전개하면 실수부(real part)와 허수부(imaginary part)로 나뉘어 u와 v를 명시적으로 얻는다. 그다음 x나 y를 고정하면 매개변수 곡선(parametric curve)이 남고, 항등식 $\cos^2+\sin^2=1$과 $\cosh^2-\sinh^2=1$로 매개변수를 소거한다.

풀이

u와 v 구하기

양변을 2로 나누면 $u+\mathrm{i}v=\sinh(x+\mathrm{i}y)$이다. $\sinh(\mathrm{i}y)=\mathrm{i}\sin y$와 $\cosh(\mathrm{i}y)=\cos y$를 이용하면

$$\begin{aligned}\sinh(x+\mathrm{i}y)&=\sinh x\cosh(\mathrm{i}y)+\cosh x\sinh(\mathrm{i}y)\\&=\sinh x\cos y+\mathrm{i}\cosh x\sin y.\end{aligned}$$

(원한다면 $\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)-\mathrm{e}^{-x}(\cos y-\mathrm{i}\sin y))$를 직접 전개해도 된다. 결과는 같다.) x, y, u, v가 모두 실수이므로 실수부와 허수부를 비교하면

$$u=\sinh x\cos y,\qquad v=\cosh x\sin y.$$

직선 $x=a$

$x=a$를 고정하고 y를 자유롭게 두면 $u=\sinh a\cos y$, $v=\cosh a\sin y$이다. $a>0$이므로 $\sinh a$와 $\cosh a$는 모두 양수이고, 따라서 나눌 수 있다.

$$\left(\frac{u}{\sinh a}\right)^2+\left(\frac{v}{\cosh a}\right)^2=\cos^2 y+\sin^2 y=1.$$

역으로 이 타원(ellipse) 위의 모든 점은 어떤 y에 대하여 $(\sinh a \cos y, \cosh a \sin y)$ 꼴로 나타난다. 이것이 타원의 표준적인 매개화(parametrisation)이기 때문이다. 따라서 직선 $x = a$는 타원 전체에 대응하며(y의 길이 2π인 구간마다 한 번씩 그려진다), 이 타원의 반축(semi-axis)은 u축 방향으로 $\sinh a$, v축 방향으로 $\cosh a$이다.

직선 $y = b$

이제 $y = b$를 고정하고 x를 자유롭게 둔다. 그러면 $u = \sinh x \cos b$, $v = \cosh x \sin b$이다. 문제에서 $0 < \sin b < 1$이라 했으므로 $\sin b \neq 0$이고, $\cos^2 b = 1 - \sin^2 b > 0$이므로 $\cos b \neq 0$이기도 하다. 나누면

$$\left(\frac{v}{\sin b}\right)^2 - \left(\frac{u}{\cos b}\right)^2 = \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

이것은 축이 v축 위에 있고 꼭짓점(vertex)이 $(0, \pm \sin b)$인 쌍곡선(hyperbola)이다.

> ? **생각해 보기** 왜 한 가지(branch)만 나타나는가? 그리고 그 가지 전체가 덮이는가?

$\cosh x > 0$이고 $\sin b > 0$이므로 항상 $v > 0$이다. 즉 위쪽 가지만 얻어진다. 그리고 그 가지 전체가 얻어진다. 위쪽 가지 위의 임의의 점 (u, v)가 주어지면 $x = \sinh^{-1}(u / \cos b)$로 택하여 $\sinh x \cos b = u$가 되게 한다. 그러면 $\cosh x \sin b$는 그 u에 대한 쌍곡선 방정식의 양의 근이고, 이것이 바로 v이다. 따라서 직선 $y = b$는 정확히 한 가지, 곧 $v > 0$인 가지에 대응한다.

교점과 직각

점 $x = a, y = b$는 두 직선 위에 모두 있으므로, 그 상은 두 곡선 위에 모두 있다.

$$(u, v) = (\sinh a \cos b,\ \cosh a \sin b).$$

그 점에서 곡선의 방향을 구하려면 각 매개화를 자신의 매개변수로 미분한다. 타원($x = a$, 매개변수 y)을 따라 $y = b$에서

$$\mathbf{t}_1 = \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\right) = (-\sinh a \sin b,\ \cosh a \cos b).$$

쌍곡선($y = b$, 매개변수 x)을 따라 $x = a$에서

$$\mathbf{t}_2 = \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right) = (\cosh a \cos b,\ \sinh a \sin b).$$

두 벡터 모두 성분 $\cosh a \cos b \neq 0$을 가지므로 영벡터가 아니고, 따라서 둘 다 진짜 접벡터(tangent vector)이다. 이들의 스칼라곱(scalar product)은

$$\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_2 = -\sinh a \sin b \cosh a \cos b + \cosh a \cos b \sinh a \sin b = 0,$$

이므로, 요구된 대로 타원과 쌍곡선의 가지는 이 점에서 직각으로 만난다.

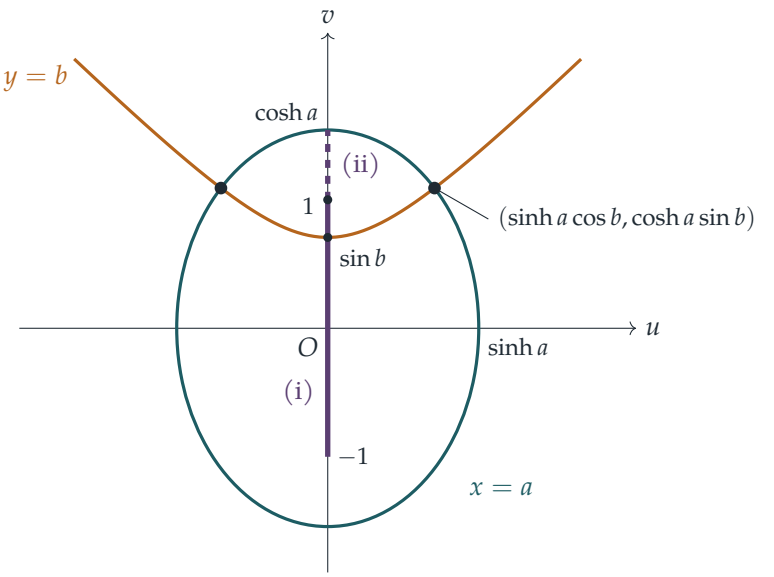
(두 곡선 모두 $u \mapsto -u$ 대칭을 가지므로, $x = -a$, $y = b$의 상, 또는 마찬가지로 $x = a$, $y = \pi - b$의 상인 $(-\sinh a \cos b, \cosh a \sin b)$에서도 직각으로 만난다.)

그림

(i) $x = 0$이면 $u = 0$, $v = \sin y$이다. 이는 v축 위의 $(0, -1)$에서 $(0, 1)$까지의 선분이다. $\sinh a \to 0$이고 $\cosh a \to 1$이므로, 이것은 $a \to 0$일 때 타원들의 극한임에 주목하자.

(ii) $y = \frac{1}{2}\pi$, $0 \le x \le a$이면 $u = 0$, $v = \cosh x$이고, 이 값은 1에서 $\cosh a$까지 증가한다. 이는 v축 위의 $(0, 1)$에서 타원의 꼭대기 $(0, \cosh a)$까지의 선분이다.

쌍곡선 가지의 꼭짓점은 $(0, \sin b)$이고, 이 점은 선분 (i) 위에 있다. 그림에서는 $a = 1$, $b = \frac{1}{4}\pi$를 사용하였다.



선분 (i)은 실선, 선분 (ii)는 점선이며, 둘을 합치면 v축을 따라 -1에서 타원의 꼭대기까지 이어진다. 대신 모든 실수 x에 대해 $y = \frac{1}{2}\pi$를 택하면 v축 위의 반직선 $v \ge 1$이 두 번 겹쳐 그려지는데, 이것은 문제에서 제외한 퇴화(degenerate)된 경우 $\sin b = 1$이다.

검산

▶ 두 이차곡선 모두 초점(focus)이 $(0, \pm 1)$이다. 타원에서는 $\cosh^2 a - \sinh^2 a = 1$이고, 쌍곡선에서는 $\sin^2 b + \cos^2 b = 1$이기 때문이다. 공초점(confocal) 타원과 쌍곡선은 항상 직각으로 만나므로, 우리의 결과와 일치한다.

- 수치적으로 $a = 1$, $b = \frac{1}{4}\pi$일 때 $\sinh(1 + \frac{1}{4}\pi\mathrm{i}) \approx 0.8310 + 1.0911\mathrm{i}$이고, 이는 $(\sinh 1 \cos \frac{1}{4}\pi,\ \cosh 1 \sin \frac{1}{4}\pi)$와 일치한다. 또한 무작위로 고른 여러 (a, b)에서 두 곡선의 방정식과 스칼라곱이 0이 됨을 확인하였다.

흔한 실수

- $\mathrm{i}\sin y$ 대신 $\sinh(\mathrm{i}y) = \sin y$로 쓰는 것. 이렇게 하면 u와 v의 역할이 뒤바뀐다.
- 왜 $v > 0$인 가지만 나타나는지 설명하지 않고 "쌍곡선"이라고만 말하는 것.
- $\cos b \neq 0$임을 확인하지 않고 그것으로 나누는 것. 조건 $\sin b < 1$은 바로 이것을 위한 것이다.

STEP 너머

사상 $z \mapsto \sinh z$는 **등각**(*conformal*)이다. 즉 도함수가 0이 아닌 곳에서는 각을 보존하므로, 직선 $x =$ 상수와 $y =$ 상수로 이루어진 직교 격자는 곡선들의 직교 격자, 여기서는 공초점 타원과 쌍곡선으로 옮겨져야 한다. 평평한 판이나 틈 주위에서 라플라스(Laplace) 방정식을 풀 때 이러한 "타원 좌표"가 나타나는 이유가 바로 이것이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 바로 이런 종류의 그림을 많이 곁들여 등각 사상을 아름답게 설명한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.