풀이

STEP II 1989, 문제 2

순수수학 • 멱급수의 계수

> **STEP II 1989, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q2

핵심 아이디어

x에서의 함수값과 $2x$에서의 같은 함수의 값을 연결하는 삼각함수 항등식(identity)은 거듭제곱급수(power series)의 계수(coefficient) 사이의 관계로 바뀐다. x를 $2x$로 바꾸면 x^n의 계수에 2^n이 곱해지므로, 양변을 모두 거듭제곱급수로 쓰고 나면 계수를 비교하여 관계를 곧바로 읽어 낼 수 있다. 유용한 요령은 먼저 전체에 x를 곱하는 것이다. 그러면 모든 항이 0에서 제대로 된 거듭제곱급수를 갖는 함수가 된다.

풀이

풀이 전체에서 x는 작고 영이 아닌 값이므로, 아래의 모든 급수는 수렴(converge)한다(예를 들어 $0 < |x| < \frac{\pi}{4}$에서는 관련된 모든 함수가 잘 정의되고 좋은 성질을 가진다). 0 주위의 구간에서 일치하는 두 수렴하는 거듭제곱급수는 계수가 같으므로, x^n의 계수를 비교할 수 있다.

a_{n-1}과 b_n 사이의 관계

먼저 $(*)$를 확인한다.

$$\cot x - \tan x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{\cos 2x}{\frac{1}{2}\sin 2x} = 2\cot 2x.$$

x를 곱하면

$$x\cot x - x\tan x = (2x)\cot(2x).$$

이제 각 항을 급수로 쓴다.

- $x\cot x = 1 + \sum_{n\geq 1} b_n x^n$.

- $x\tan x = \sum_{m\geq 0} a_m x^{m+1} = \sum_{n\geq 1} a_{n-1}x^n$. 여기서 $n = m+1$로 놓았다.
- x가 작으면 $2x$도 작으므로, $x\cot x$의 급수에서 x를 $2x$로 바꿀 수 있다.

$$(2x)\cot(2x) = 1 + \sum_{n\geq 1} b_n (2x)^n = 1 + \sum_{n\geq 1} 2^n b_n x^n.$$

따라서

$$1 + \sum_{n\geq 1} (b_n - a_{n-1})x^n = 1 + \sum_{n\geq 1} 2^n b_n x^n.$$

상수항은 일치하고, $n \geq 1$에 대해 x^n의 계수를 비교하면 $b_n - a_{n-1} = 2^n b_n$, 즉

$$a_{n-1} = (1-2^n)\, b_n \qquad (n \geq 1),$$

이므로 요구된 결과를 얻는다.

> ? **생각해 보기** $\cot x$ 자체를 다루지 않고, 전개하기 전에 x를 곱하는 이유는 무엇인가?

$\cot x$는 0에서 발산하므로 그곳에서 거듭제곱급수를 갖지 않는다. 문제에서 주어진 것도 $x\cot x$의 급수뿐이다. 항등식 전체에 x를 곱하면 모든 항이 "거듭제곱급수를 갖는 함수" 꼴이 되고, 우변의 코탄젠트 항은 $(2x)\cot(2x)$, 즉 같은 함수를 $2x$에서 계산한 값이 된다. 이것이 바로 우리가 필요로 하는 꼴이다.

계수 c_n

짝을 이루는 항등식은 차 대신 합을 쓴 것이다.

$$\cot x + \tan x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2x} = 2\operatorname{cosec} 2x.$$

다시 x를 곱하면

$$x\cot x + x\tan x = (2x)\operatorname{cosec}(2x).$$

앞에서와 같은 전개와, x를 $2x$로 바꾼 $x\operatorname{cosec} x$의 급수를 이용하면

$$1 + \sum_{n\geq 1} (b_n + a_{n-1})x^n = 1 + \sum_{n\geq 1} 2^n c_n x^n,$$

이므로 $n \geq 1$에 대해

$$2^n c_n = b_n + a_{n-1}.$$

이제 첫 번째 결과를 이용하여 b_n을 소거한다. $n \geq 1$이므로 $1 - 2^n \neq 0$이고, 따라서 $b_n = \dfrac{a_{n-1}}{1-2^n}$이며

$$2^n c_n = a_{n-1}\left(\frac{1}{1-2^n} + 1\right) = a_{n-1}\frac{2-2^n}{1-2^n} = a_{n-1}\frac{2\,(2^{n-1}-1)}{2^n - 1}.$$

2^n으로 나누고 $2/2^n = 1/2^{n-1}$로 쓰면

$$c_n = \frac{2^{n-1}-1}{2^n-1} \cdot \frac{1}{2^{n-1}}\, a_{n-1} \qquad (n \geq 1),$$

이고, 이것이 요구된 결과이다.

검산

$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots$로부터 $a_1 = 1$, $a_3 = \frac{1}{3}$이다. 첫 번째 결과는 $b_2 = a_1/(1-4) = -\frac{1}{3}$과 $b_4 = a_3/(1-16) = -\frac{1}{45}$을 예측하는데, 이는 $x\cot x = 1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{45}x^4 - \cdots$와 일치한다. 두 번째 결과는 $c_2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{6}$과 $c_4 = \frac{7}{15}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3} = \frac{7}{360}$을 예측하는데, 이는 $x\operatorname{cosec} x = 1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{360}x^4 + \cdots$와 일치한다. $n = 1$인 경우도 살펴보자. $a_0 = 0$이고 $b_1 = c_1 = 0$이므로 두 공식 모두와 들어맞는다. sin과 cos의 급수를 나누어 $n \leq 23$인 모든 경우에 대해 두 관계를 (분수로) 정확히 확인하였고, 급수를 $\tan 0.3 \approx 0.309336$ 및 $0.3\operatorname{cosec} 0.3 \approx 1.015159$와 비교하여 확인하였다.

흔한 실수

- 첨자 이동(index shift)을 잊는 것: $x\tan x$에서 x^n의 계수는 a_n이 아니라 a_{n-1}이다.
- $x\cot x$에서 x에 $2x$를 대입하면서 $2x\cot x$나 $x\cot 2x$로 쓰는 것: 항등식의 항은 정확히 $(2x)\cot(2x)$여야 한다.
- $1-2^n$으로 나누기 전에 $1-2^n \neq 0$임을 밝히지 않는 것.

STEP 너머

여기서 나온 계수들은 간단한 인수를 제외하면 베르누이 수(Bernoulli numbers)이다. $x\cot x = \sum_{k\geq 0}(-1)^k \frac{2^{2k}B_{2k}}{(2k)!}x^{2k}$이고, 문제의 관계식들은 탄젠트와 코시컨트의 급수를 베르누이 수로 나타내 준다. 0 근처에서 일치하는 두 거듭제곱급수의 계수를 같다고 놓을 수 있다는 사실(거듭제곱급수의 일치 정리(identity theorem))은 해석학 입문 과정에서 증명된다. 더 알고 싶다면 거듭제곱급수에 관해서는 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)를, 이러한 전개가 복소함수로부터 자연스럽게 나타나는 모습은 Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)를 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.