풀이

STEP II 1989, 문제 14

역학 • 원운동

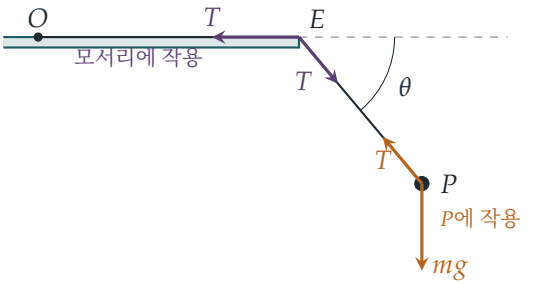
> **STEP II 1989, 14번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q14

핵심 아이디어

입자를 놓은 뒤에도 탁자 위에 놓인 실 부분은 움직이지 않는다. 이 부분은 고정된 끝과 모서리 사이에서 팽팽하게 당겨져 있기 때문이다. 따라서 모서리는 고정된 회전축 역할을 하고, 입자는 그 점을 중심으로 반지름 a인 원 위를 움직인다. 이는 수평 위치에서 놓은 단진자(simple pendulum)와 똑같다. 에너지로 속력을 구하고, 지름 방향의 운동 방정식(equation of motion)으로 장력(tension)을 구한다. 모서리는 매끄러우므로 모서리 양쪽의 장력은 같고, 모서리가 받는 힘은 두 실 조각을 따라 당기는 크기가 같은 두 장력의 벡터(vector) 합이다.

풀이

모형. 실은 가볍고 늘어나지 않으며, 탁자 윗면은 매끄럽고 얇고, 입자는 질점이다. 실의 고정된 끝을 O, 실이 모서리를 지나는 점을 E라 하면 $OE = l - a$이고 매달린 부분 EP의 길이는 a이다. 매달린 부분이 수평(탁자에서 멀어지는 쪽을 가리키는 처음 방향) 아래로 돌아간 각을 θ라 하자.



O는 고정되어 있고 실은 팽팽한 상태를 유지하므로(아래에서 $T > 0$임을 확인한다) 부분 OE는 탁자 위에 정지한 채로 있다. 따라서 P는 중심이 E이고 반지름이 a인 원 위를 움직인다.

속력. 탁자는 매끄럽고 장력은 항상 P의 운동 방향에 수직이므로 어느 쪽도 일을 하지 않으며, 역학적 에너지가 보존된다(conservation of mechanical energy). 실이 θ만큼 돌아갔을 때 P는 높이 $a\sin\theta$만큼 내려왔으므로, 정지 상태에서 출발한 것을 이용하면

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = mga\sin\theta \qquad \Longrightarrow \qquad v^2 = 2ga\sin\theta.$$

장력. PE를 따라 중심 E 쪽으로 힘을 분해하자. 장력은 PE를 따라 작용하고, 무게의 PE 방향 성분은 E에서 **멀어지는** 방향으로 $mg\sin\theta$이다($0 < \theta < \pi$에서 P는 E보다 아래에 있다). 따라서

$$T - mg\sin\theta = \frac{mv^2}{a} = 2mg\sin\theta, \qquad \text{따라서} \qquad \boxed{T = 3mg\sin\theta.}$$

이 값은 $0 < \theta < \pi$에서 양수이므로 실은 운동 내내 팽팽하다. $\theta = \pi$에서는 $v = 0$이다. 즉 입자는 E와 같은 높이인 탁자 아랫면에 겨우 닿은 뒤 되돌아온다. 따라서 운동은 $0 \le \theta \le \pi$에서 일어난다.

모서리가 받는 힘. 모서리는 매끄러우므로 모서리 양쪽의 장력은 모두 T이다. 실은 크기가 T인 두 힘으로 모서리를 누른다. 하나는 EO를 따라 고정된 끝 쪽으로 향하는 수평 방향의 힘이고, 다른 하나는 EP를 따르는 힘이다. 탁자에서 멀어지는 수평 방향을 x, 연직 위쪽을 y로 잡자. EO와 EP 방향의 단위벡터는 $(-1, 0)$과 $(\cos\theta, -\sin\theta)$이므로 모서리가 받는 힘은

$$\mathbf{F} = T\,(\cos\theta - 1,\ -\sin\theta).$$

그 크기는

$$|\mathbf{F}| = T\sqrt{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta} = T\sqrt{2 - 2\cos\theta} = 2T\sin\tfrac{\theta}{2}$$

이다. 여기서 $1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$와 $0 \le \theta \le \pi$에서 $\sin\frac{\theta}{2} \ge 0$임을 이용했다. (기하적으로 보면, 사이각이 $\pi - \theta$인 크기 T의 두 힘을 더하면 $2T\cos\frac{\pi-\theta}{2}$가 되어 같은 결과이다.) T와 $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$를 대입하면

$$|\mathbf{F}| = 6mg\sin\theta\sin\tfrac{\theta}{2} = 12mg\,s^2\sqrt{1-s^2}, \qquad \text{여기서} s = \sin\tfrac{\theta}{2} \in [0,1].$$

생각해 보기 $s^2\sqrt{1-s^2}$를 어떻게 깔끔하게 최대화할 수 있을까?

이 값은 음이 아니므로 그 제곱 $h(u) = u^2(1-u)$를 $u = s^2 \in [0,1]$에서 최대화하면 충분하다. 그러면 $h'(u) = 2u - 3u^2 = u(2-3u)$이고, 이는 $0 < u < \frac{2}{3}$에서 양수, $\frac{2}{3} < u \leq 1$에서 음수이다. 따라서 h는 $[0,1]$에서 $u = \frac{2}{3}$일 때 최댓값 $h = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$을 가진다. 그러므로 $s^2\sqrt{1-s^2}$의 최댓값은 $\sqrt{4/27} = \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$이고,

$$|\mathbf{F}|_{\max} = 12mg \cdot \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{8mg}{\sqrt{3}},$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다. 최대는 $\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{2}{3}$, 즉 $\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} = -\frac{1}{3}$일 때, 곧 $\theta \approx 109.5°$일 때 일어난다. 이때 입자는 이미 모서리 아래를 지나 탁자 밑으로 흔들려 들어가고 있다.

검산

- $\theta = \frac{\pi}{2}$(실이 연직)에서 속력은 $\sqrt{2ga}$이고 $T = 3mg$인데, 이는 수평 위치에서 놓은 진자에 대해 잘 알려진 결과이다. 이때 모서리가 받는 힘은 $T\sqrt{2} = 3\sqrt{2}\,mg \approx 4.24mg$로, $8mg/\sqrt{3} \approx 4.62mg$보다 조금 작다. 이는 최댓값이 연직 위치를 지난 곳에 있다는 사실과 일치한다.
- $\theta = 0$과 $\theta = \pi$에서 입자는 모서리와 같은 높이에서 순간적으로 정지하므로 $T = 0$이고, 공식이 말해 주듯 모서리는 아무 힘도 받지 않는다.
- 운동 방정식 $\ddot{\theta} = (g/a)\cos\theta$를 수치적으로 적분해 보았다. 지름 방향 방정식에서 얻은 T는 10^{-12} 이내로 $3mg\sin\theta$와 일치했고, 모서리가 받는 가장 큰 힘은 $\theta \approx 1.9106$(즉 $\arccos(-\frac{1}{3})$)에서 $4.6188\,mg$로 나와 $8/\sqrt{3}$과 일치했다.

흔한 실수

- 모서리가 받는 힘을 단순히 T로, 또는 매달린 실이 당기는 힘의 연직 성분만으로 잡는 것. 탁자 위의 실도 모서리를 수평 방향으로 당기므로, 두 힘을 벡터로 더해야 한다.
- 최대화를 $\theta \leq \frac{\pi}{2}$에서 멈추는 것. 입자는 탁자 밑으로 계속 움직이며, 최댓값은 그 이후 단계에 있다.

STEP 너머

여기서 장력은 **구속력**(constraint force)이다. 구속력은 일을 하지 않으며, 입자를 원 위에 붙잡아 두는 데 필요한 만큼의 크기를 가진다. 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)에서는 이런 힘이 운동 방정식에서 완전히 사라지고, 나중에 (우리가 지름 방향 방정식으로 했듯이) 다시 구하거나 라그랑주 승수(Lagrange multipliers)를 사용해 구한다. Kleppner와

Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 원운동, 구속 조건, 에너지 방법을 이 수준에서 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.