풀이

STEP II 1989, 문제 13

역학 • 관성 모멘트

> **STEP II 1989, 13번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q13

이 문제는 *Beyond STEP*의 11.7 절 **막대 속의 심프슨 공식**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch11/simpsons-rod.html

핵심 아이디어

모든 것은 관성 모멘트(moment of inertia)에 관한 두 가지 사실에 기대고 있다. 평행축 정리(parallel axis theorem)에 따르면, 임의의 축에 대한 관성 모멘트는 질량, 질량 중심(centre of mass), 그리고 질량 중심을 지나는 평행한 축에 대한 관성 모멘트로 정해진다. 또 관성 모멘트는 **가법적**(*additive*)이므로, 물체를 여러 조각으로 자르고 각 조각을 동등한 다른 것으로 바꾸어 놓을 수 있다. 얇은 판(lamina)은 가는 막대(rod)들을 쌓아 놓은 것이므로, 막대 하나를 바꾸는 방법을 알면 판 전체를 바꿀 수 있다.

풀이

모든 축에 대한 동등성

ℓ을 임의의 축이라 하고, ℓ_O를 O를 지나며 ℓ에 평행하고 ℓ로부터 거리 d만큼 떨어진 축이라 하자. 물체와 입자계는 둘 다 질량이 m이고 질량 중심이 O이므로, 각각에 평행축 정리를 적용할 수 있다.

$$I_\ell^{\text{물체}} = I_{\ell_O}^{\text{물체}} + md^2, \qquad I_\ell^{\text{입자}} = I_{\ell_O}^{\text{입자}} + md^2.$$

ℓ_O는 O를 지나므로 가정에 의해 $I_{\ell_O}^{\text{물체}} = I_{\ell_O}^{\text{입자}}$이다. 따라서 두 우변은 같고, 모든 축 ℓ에 대해 $I_\ell^{\text{물체}} = I_\ell^{\text{입자}}$이다. 이것이 보이려던 것이다.

균일한 막대

막대를 x축 위에 $x = -a$부터 $x = a$까지 놓으면, 질량 중심 O는 원점이다. 질량이 p, q, r인 입자를 각각 $x = -a, 0, a$에 놓는다. 전체 질량이 m이고 질량 중심이 O이려면

$$p + q + r = m, \qquad -pa + ra = 0,$$

이어야 하므로 $r = p$이고 $q = m - 2p$이다.

이제 O를 지나고 막대와 각 θ를 이루는 임의의 축을 생각하자. 막대 위의 위치 x에 있는 점은 이 축으로부터 거리 $|x| \sin\theta$만큼 떨어져 있다. 따라서 O를 지나는 축에 대한 관성 모멘트는 모두 $\sum$(질량) x^2의 $\sin^2\theta$배이고, 이 합 하나만 일치시키면 된다. 각 미소 부분의 질량이 $\frac{m}{2a}\,\mathrm{d}x$인 막대에 대해서는

$$\int_{-a}^{a} \frac{m}{2a} x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{m}{2a} \cdot \frac{2a^3}{3} = \tfrac{1}{3}ma^2,$$

이고, 입자들에 대해서는 $pa^2 + q \cdot 0 + pa^2 = 2pa^2$이다. $p = \frac{1}{6}m$이면 모든 θ에 대해 이 둘이 일치한다. 따라서 막대는 다음 입자계와 동역학적으로 동등(dynamically equivalent)하다.

$$\tfrac{1}{6}m \text{ (양 끝에 각각)}, \qquad \tfrac{2}{3}m \text{ (중점에)}.$$

첫 번째 부분에 의해, 이제 둘은 O를 지나는 축뿐 아니라 **임의의** 축에 대해 같은 관성 모멘트를 가진다.

직사각형 판

직사각형의 중심을 O라 하고, 변의 길이를 $2a$(x축에 평행)와 $2b$라 하면, 단위 넓이당 질량은 $M/(4ab)$이다. 이 판을 x축에 평행한 가는 띠로 자른다. 높이 y에 있는 폭 δy의 띠는 길이가 $2a$이고 질량이 $\delta M = \frac{M}{2b}\,\delta y$인 균일한 막대이다.

> ? **생각해 보기** 띠의 중심은 O에 있지 않다. 그런데도 각 띠를 세 입자로 바꾸어 놓아도 되는 이유는 무엇인가?

첫 번째 부분이 바로 이것을 위한 것이다. 각 띠는 띠 자신의 중심을 지나는 축뿐 아니라 **모든** 축에 대해 세 입자와 같은 관성 모멘트를 가진다. 관성 모멘트는 더해지므로, 판은 임의의 축에 대해 대체한 입자 전체의 모임과 같은 관성 모멘트를 가진다. 각 띠를 대체한 입자들은 그 띠와 같은 질량과 같은 질량 중심을 가지므로, 이 입자 전체의 모임 역시 전체 질량이 M이고 질량 중심이 O이다.

높이 y의 띠는 $(\pm a, y)$ 각각에 놓인 $\frac{1}{6}\delta M = \frac{M}{12b}\,\delta y$와 $(0, y)$에 놓인 $\frac{2}{3}\delta M = \frac{M}{3b}\,\delta y$로 바뀐다. y가 $-b$부터 b까지 움직이면 이 입자들은 길이가 $2b$인 균일한 막대 세 개를 채운다.

▶ 두 변 $x = \pm a$를 따라 하나씩 있는 막대로, 각각의 질량은 $\frac{M}{12b} \cdot 2b = \frac{1}{6}M$이다.

- 중심선 $x = 0$을 따라 있는 막대로, 질량은 $\frac{M}{3b} \cdot 2b = \frac{2}{3}M$이다.

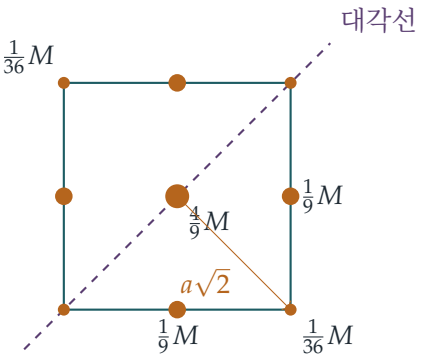
이제 같은 가법성 논리로 각 막대에 막대에 대한 결과를 적용한다.

- 각 변의 막대($\frac{1}{6}M$)는 꼭짓점인 양 끝에 각각 $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}M = \frac{1}{36}M$, 그리고 길이 $2b$인 변의 중점인 막대의 중점에 $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6}M = \frac{1}{9}M$이 된다.
- 가운데 막대($\frac{2}{3}M$)는 길이 $2a$인 변의 중점인 양 끝에 각각 $\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3}M = \frac{1}{9}M$, 그리고 중심에 $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}M = \frac{4}{9}M$이 된다.

따라서 각 꼭짓점에 $\frac{1}{36}M$, 각 변의 중점에 $\frac{1}{9}M$, 중심에 $\frac{4}{9}M$이 놓인다. 합은 $\frac{4}{36}M + \frac{4}{9}M + \frac{4}{9}M = M$이고, 대칭성에 의해 질량 중심은 O이다. 이것이 구하려던 동등한 입자계이다.

대각선에 대한 정사각형

한 변의 길이가 $2a$인 정사각형의 꼭짓점을 $(\pm a, \pm a)$에 두고, 대각선 $y = x$를 택한다. 점 (x_0, y_0)와 이 직선 사이의 거리는 $|x_0 - y_0|/\sqrt{2}$이다.



- 꼭짓점 (a, a), $(-a, -a)$와 중심은 대각선 위에 있으므로 기여하지 않는다.
- 꼭짓점 $(a, -a)$, $(-a, a)$는 거리 $2a/\sqrt{2} = a\sqrt{2}$에 있다.
- 각 중점 $(\pm a, 0)$, $(0, \pm a)$는 거리 $a/\sqrt{2}$에 있다.

따라서

$$I_{\text{대각선}} = 2 \cdot \tfrac{1}{36}M \cdot 2a^2 + 4 \cdot \tfrac{1}{9}M \cdot \tfrac{1}{2}a^2 = \tfrac{1}{9}Ma^2 + \tfrac{2}{9}Ma^2 = \tfrac{1}{3}Ma^2.$$

균일하지 않은 막대

막대의 길이를 $2a$라 하고, x축 위에 $x = 0$부터 $x = 2a$까지 놓으며, 선밀도(line density)를 kx라 하자. 그러면

$$m = \int_0^{2a} kx \, \mathrm{d}x = 2ka^2, \qquad \text{따라서} \qquad k = \frac{m}{2a^2}.$$

질량 중심은

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\int_0^{2a} kx^2\,\mathrm{d}x = \frac{k}{m}\cdot\frac{8a^3}{3} = \frac{4a}{3},$$

에 있고,

$$\int_0^{2a} kx^3\,\mathrm{d}x = \frac{k\,(2a)^4}{4} = 4ka^4 = 2ma^2.$$

이다. 균일한 막대와 마찬가지로 모든 점이 한 직선 위에 있으므로, 질량 중심을 지나고 막대와 각 θ를 이루는 축에 대한 관성 모멘트는 $\sin^2\theta\sum(\text{질량})(x-\bar{x})^2$이다. 질량과 질량 중심이 일치하면 $\sum(\text{질량})(x-\bar{x})^2 = \sum(\text{질량})x^2 - m\bar{x}^2$이므로, 끝점 $x=0$을 지나는 수직인 축에 대한 관성 모멘트인 $\sum(\text{질량})\,x^2$만 일치시키면 충분하다.

입자를 $x=0$에 p_0, $x=a$에 p_1, $x=2a$에 p_2라 하자. 질량, 1차 모멘트, 2차 모멘트를 일치시키면 다음 방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned} p_0 + p_1 + p_2 &= m,\\ p_1 a + 2p_2 a &= \tfrac{4}{3}ma,\\ p_1 a^2 + 4p_2 a^2 &= 2ma^2. \end{aligned}$$

세 번째 식(a^2으로 나눈 것)에서 두 번째 식(a로 나눈 것)을 빼면 $2p_2 = \frac{2}{3}m$이므로 $p_2 = \frac{1}{3}m$이다. 그러면 $p_1 = \frac{4}{3}m - \frac{2}{3}m = \frac{2}{3}m$이고, 마지막으로 $p_0 = m - \frac{2}{3}m - \frac{1}{3}m = 0$이다.

가벼운 끝의 입자는 질량이 0이므로 입자 두 개만 있으면 된다. 중점에 $\frac{2}{3}m$, 무거운 끝에 $\frac{1}{3}m$이다.

검산

- 한 변의 길이가 $2a$인 정사각형 판에 대해, 판의 평면 위에 있고 중심을 지나며 한 변에 평행한 축에 대한 관성 모멘트는 잘 알려진 대로 $\frac{1}{3}Ma^2$이다. 수직축 정리(perpendicular axis theorem)와 대칭성에 의해 중심을 지나는 평면 위의 모든 축에 대해 같은 값이 나오므로, 대각선에 대해서도 그래야 한다. 결과와 일치한다.
- 균일하지 않은 막대에 대해, 두 입자는 질량 m, 1차 모멘트 $\frac{2}{3}m\cdot a + \frac{1}{3}m\cdot 2a = \frac{4}{3}ma$(따라서 질량 중심은 $\frac{4}{3}a$), 2차 모멘트 $\frac{2}{3}ma^2 + \frac{4}{3}ma^2 = 2ma^2$을 주며, 모두 요구한 대로이다.
- 수치적으로, 촘촘한 격자의 점질량으로 각 물체를 나타내고 (중심을 지나지 않는) 공간 속의 무작위 축 100–200개에 대해 입자계와 비교하였다. 막대와 밀도가 변하는 막대는 10^{-7}보다 작은 오차로 일치했고, 직사각형은 4×10^{-5} 이내(격자 오차)로 일치했으며, 대각선에 대한 정사각형은 $M=a=1$일 때 0.33332를 주었다.

흔한 실수

- 그래도 되는 이유를 말하지 않고 각 띠를 세 입자로 바꾸는 것. 띠의 중심은 O에 있지 않으므로 첫 번째 부분의 "임의의 축" 결과가 필요하다.
- 마지막 부분에서 질량과 질량 중심 조건만 거는 것. 방정식 두 개로는 질량 세 개를 정할 수 없다. $p_0 = 0$을 강제하는 것은 관성 모멘트 조건이다.

STEP 너머

공간에서 움직이는 강체에서 동역학적으로 중요한 것은 질량, 질량 중심, 그리고 **관성 텐서**(*inertia tensor*)이다. 관성 텐서는 질량 중심을 지나는 모든 축에 대한 관성 모멘트를 알려 주는 3×3 대칭 행렬이다. 이것들이 같은 두 물체는 같은 힘을 받으면 똑같이 움직이며, 그래서 "동역학적으로 동등하다"는 이름이 잘 어울린다. 분포의 처음 몇 개의 모멘트를 몇 개의 점질량으로 일치시키는 것은 수치 적분(numerical integration)의 바탕이 되는 아이디어이기도 하다. 균일한 막대에 대한 가중치 $\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}$은 정확히 심프슨 공식(Simpson's rule)이며, 가중치뿐 아니라 위치까지 고르면 가우스 구적법(Gaussian quadrature)에 이른다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 관성 텐서와 강체 운동을 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.