풀이

STEP II 1989, 문제 12

역학 • 강체의 평형

> **STEP II 1989, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q12

핵심 아이디어

얇은 판(lamina)에 작용하는 힘은 무게와 두 못의 반작용력, 이렇게 세 가지뿐이다. 매끄러운(smooth) 못은 닿아 있는 변에 수직으로 밀고, 직사각형에서는 이것이 곧 각 반작용력이 **다른 변과 평행하다**는 뜻이다. 평행하지 않은 세 힘에 의해 평형(equilibrium)을 이루는 물체에서는 세 힘의 작용선(line of action)이 한 점에서 만나야 한다. 따라서 두 반작용력이 교차하는 점은 중심을 지나는 연직선 위에 있어야 한다. 두 결과 모두 이 한 가지 사실과 못들의 높이가 같다는 조건으로부터 나온다.

풀이

설정하기

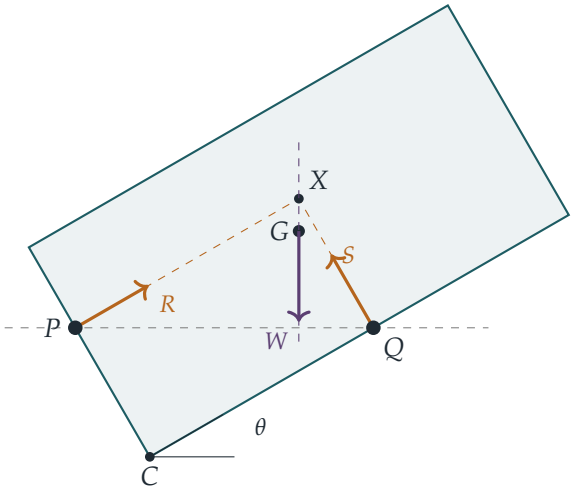
얇은 판을 무게가 W이고 중심이 G인 균일한 강체(rigid body) 직사각형으로, 못을 같은 높이에 있는 매끄러운 점 P와 Q로 모형화한다. 가장 낮은 꼭짓점을 C라 하자. C를 지나는 길이 $2a$인 변이 P 위에 놓이고 $CP = p$이며, C를 지나는 길이 $2b$인 변이 Q 위에 놓이고 $CQ = q$이다. 길이 $2b$인 변은 수평과 예각 θ를 이루므로, (그 변에 수직인) 길이 $2a$인 변은 연직과 각 θ를 이룬다.

변을 따르는 좌표를 쓰는 것이 가장 쉽다. C에서부터 길이 $2b$인 변을 따라 u를, 길이 $2a$인 변을 따라 v를 잰다. 그러면

$$C = (0,0), \qquad P = (0,p), \qquad Q = (q,0), \qquad G = (b,a).$$

점 (u,v)의 C로부터의 수평 변위와 연직 변위는 다음과 같다.

$$x = u\cos\theta - v\sin\theta, \qquad y = u\sin\theta + v\cos\theta.$$



반작용력은 G를 지나는 연직선 위에서 만난다

P에서의 반작용력 R은 길이 $2a$인 변에 수직이므로 길이 $2b$인 변과 평행하다. 즉 그 작용선은 $v = p$이다. 마찬가지로 Q에서의 반작용력 S는 $u = q$를 따라 작용한다. 이 두 직선은 직사각형 $CPXQ$의 네 번째 꼭짓점 $X = (q, p)$에서 만난다.

X에 대한 모멘트(moment)를 취하면 두 반작용력의 모멘트는 0이므로, 무게의 모멘트도 0이어야 한다. 즉 G를 지나는 연직선은 X를 지난다. 다시 말해 X와 G의 수평 좌표가 같다.

$$q\cos\theta - p\sin\theta = b\cos\theta - a\sin\theta, \qquad \text{즉} \qquad (q-b)\cos\theta = (p-a)\sin\theta. \qquad (1)$$

(힘을 분해하면 $R = W\sin\theta$, $S = W\cos\theta$로 둘 다 양수이므로, 못이 실제로 이 힘들을 제공할 수 있다.)

첫 번째 결과

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이므로 $\cos\theta$와 $\sin\theta$는 모두 양수이고, 따라서 (1)에 의해 $q - b$와 $p - a$의 부호는 같다. $p < a$이면 (1)의 우변이 음수이므로 $q - b < 0$, 즉 $q < b$이다. 이것이 구하는 결과이다. 꼭짓점이 길이 $2a$인 변 위의 못으로부터 a보다 가까이 있으면, 다른 못으로부터는 b보다 가까이 있다.

? **생각해 보기** 왜 여기서 문제가 끝나지 않을까? d는 어디에 등장하는가?

식 (1)은 모멘트 조건만 사용한다. 아직 d와는 관련이 없고, p와 q는 서로 독립이 아니다. 두 못은 높이가 같고, 서로 d만큼 떨어져 있다. 이제 이 두 사실을 이용한다.

d와의 관계

두 못은 같은 높이에 있으므로 P와 Q의 y좌표가 같다.

$$p\cos\theta = q\sin\theta, \qquad \text{따라서} \qquad p = q\tan\theta. \tag{2}$$

두 못의 수평 거리는 d이다.

$$d = x_Q - x_P = q\cos\theta + p\sin\theta = q\cos\theta + \frac{q\sin^2\theta}{\cos\theta} = \frac{q}{\cos\theta}. \tag{3}$$

(같은 말로, 삼각형 CPQ는 C에서 직각이고 빗변 $PQ = d$가 수평이므로 $q = d\cos\theta$, $p = d\sin\theta$이다.)

이제 $q = d\cos\theta$와 $p = d\sin\theta$를 (1)의 첫 번째 형태의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} b\cos\theta - a\sin\theta &= q\cos\theta - p\sin\theta \\ &= d\cos^2\theta - d\sin^2\theta \\ &= d\cos 2\theta, \end{aligned}$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

검산

- 정사각형인 경우 $a = b, \theta = \frac{\pi}{4}$: 양변이 모두 0이다. 대칭성에 의해 대각선 CG가 연직이므로 이는 모순이 없고, 정사각형이 대칭적으로 놓여 있을 때 그래야 하듯이 모든 d에 대해 성립한다.
- $a = 1$, $b = 2$, $\theta = \frac{\pi}{6}$일 때, 평형이 되려면 $q = d\cos\theta$이고 $d = (b\cos\theta - a\sin\theta)/\cos 2\theta \approx 2.4641$이어야 한다. 이로부터 $p \approx 1.2321 > a$, $q \approx 2.1340 > b$를 얻으며, 이는 (1)과 일치한다. $R = W\sin\theta$, $S = W\cos\theta$로 G에 대한 모멘트를 취하면 0이 된다.
- 수치적으로, 10^5개가 넘는 무작위 평형 상태(못이 변 위에 있도록 무작위로 고른 a, b, θ)가 모두 10^{-14} 이내의 오차로 항등식을 만족하며, "$p < a \Rightarrow q < b$"를 어기는 경우는 한 번도 없다.

흔한 실수

- 못에서의 반작용력을 연직 방향으로 잡는 것. 매끄러운 접촉면은 지면에 수직인 방향이 아니라 **접촉면**(여기서는 얇은 판의 변)에 수직인 방향으로 민다.
- 어느 변이 수평과 각 θ를 이루는지 혼동하는 것. 길이 $2a$인 변은 **연직**과 각 θ를 이룬다.

STEP 너머

세 힘의 원리는 강체 정역학(statics)의 일반 이론의 특수한 경우이다. 힘의 계는 합력과 임의의 한 점에 대한 합모멘트가 모두 0일 때, 그리고 그때에만 평형을 이룬다. 대학에서는 이것이 렌치(wrench)와 가상일(virtual work)의 언어가 된다. 가상일 접근법에서는 얇은 판이 못과의 접촉을 유지한다는 조건 아래 G의 높이를 최소화하여 이 평형을 찾는다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 강체 정역학과 토크(torque)를 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.