풀이

STEP II 1989, 문제 11

역학 • 연결된 입자와 충격량

> **STEP II 1989, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q11

핵심 아이디어

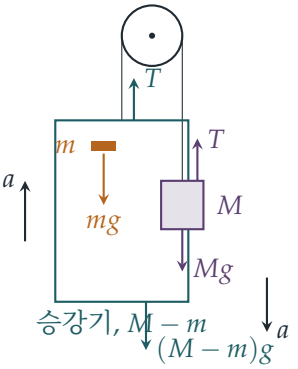
처음에 승강기(lift)와 평형추(counterweight)가 균형을 이루고 있으므로, 승강기의 질량 M에는 타일이 포함되어 있어야 한다. 타일이 떨어져 나가면 승강기는 평형추보다 가벼워져 **위쪽으로** 가속하고, 타일은 자유낙하(free fall)한다. 따라서 바닥이 올라와 타일을 맞이하게 된다. 충돌을 다룰 때에는 승강기, 케이블, 평형추를 케이블을 따라 움직이는 하나의 계로 본다. 이 계의 "케이블 방향 운동량(momentum)"은 중력에 의해서만 변하며, 충돌에서 생기는 충격량(impulse)은 이 계의 내부에서 주고받는 것이다.

풀이

모형 세우기

승강기, 평형추, 타일을 질점으로 보고, 케이블은 매끄럽고 가벼운 도르래에 걸린 가볍고 늘어나지 않는 줄로 본다. 안내 레일은 매끄러우므로 연직 방향의 힘을 주지 않는다. 타일이 떨어지기 전에 계는 양쪽에 질량 M과 M이 걸린 채 정지해 있다. 따라서 승강기의 질량 M에는 타일이 포함된다. (그렇지 않다면 승강기 쪽의 무게는 $(M+m)g$, 반대쪽은 Mg가 되어 정지해 있을 수 없다.)

타일이 떨어져 나간 뒤 승강기의 질량은 $M-m$, 평형추의 질량은 M이고, 타일은 자유로운 질점이다.



바닥에 닿을 때까지 걸리는 시간

승강기가 위쪽으로 가속도 a로 움직인다고 하자. 그러면 평형추는 아래쪽으로 가속도 a로 움직인다. 케이블의 장력(tension)을 T라 하자. 뉴턴(Newton)의 운동 제2법칙에 의해

$$\begin{aligned} \text{승강기 (위쪽):} \quad & T-(M-m)g=(M-m)a, \\ \text{평형추 (아래쪽):} \quad & Mg-T=Ma. \end{aligned}$$

두 식을 더하면 T가 소거되어

$$a=\frac{mg}{2M-m}, \qquad T=M(g-a)=\frac{2M(M-m)g}{2M-m}>0,$$

이므로 케이블은 팽팽한 상태를 유지한다.

생각해 보기 왜 그냥 타일이 중력을 받아 거리 h만큼 떨어진다고 할 수 없을까?

바닥도 움직이고 있기 때문이다. 타일은 아래로 가속도 g로, 바닥은 위로 가속도 a로 움직이며, 둘 다 정지 상태에서 출발한다. 따라서 둘 사이의 간격은 일정한 상대 가속도(relative acceleration)

$$g+a=g+\frac{mg}{2M-m}=\frac{2Mg}{2M-m}.$$

로 줄어든다. 처음 간격은 h이므로, 타일은 $\frac{1}{2}(g+a)t^2=h$일 때 바닥에 닿고, 이로부터

$$t^2=\frac{2h}{g+a}=\frac{(2M-m)h}{Mg}, \qquad t=\sqrt{\frac{(2M-m)h}{Mg}}.$$

을 얻는다. 이것은 문제에 인쇄된 식과 **다르다**. 인쇄된 식에는 $2M-m$ 대신 $2(M-m)$이 들어 있다. 두 식은 $m=0$일 때만 일치하며, 우리가 구한 값은 아래에서 운동을 수치적으로 한 단계씩 계산하여 확인한다. 인쇄된 식이 나오려면 승강기의 가속도가 $mg/(M-m)$이어야 한다. 이는 평형추도 함께 가속되어야 한다는 사실을 잊고 장력이 Mg로 유지된다고 볼 때 나오는 값이다. 인쇄된 식은 원래 문제의 오식이나 실수라고 생각한다. 문제의 나머지 부분은 이 식에 의존하지 않는다.

충돌

충돌 직전에 승강기는 위로, 평형추는 아래로 둘 다 속력 $u = at$로 움직인다. 타일은 아래로 속력 $v = gt$로 움직인다. 그러면

$$(2M - m)u = (2M - m) \cdot \frac{mg}{2M - m}\, t = mgt = mv.$$

이제 충돌을 살펴보자. 케이블이 둘을 함께 움직이는 방향, 즉 승강기는 위쪽 / 평형추는 아래쪽을 "양의 방향"으로 잡는다. 충돌 시간은 매우 짧으므로 유한한 힘(무게)이 주는 충격량은 무시할 수 있다. 충격량은 승강기와 타일 내부에서 주고받는 타일–바닥 사이의 충격량과, 케이블에 생기는 충격 장력 J뿐이다. 충돌 후의 공통 속력을 w라 하자(질량 M인 승강기와 타일은 위쪽, 평형추는 아래쪽). 충돌은 완전 비탄성 충돌(perfectly inelastic collision)이므로 타일은 결국 바닥과 함께 움직인다. 그러면

$$\text{승강기와 타일:}\quad Mw - [(M - m)u - mv] = J,$$
$$\text{평형추:}\quad Mw - Mu = -J.$$

두 식을 더하면

$$2Mw = (M - m)u + Mu - mv = (2M - m)u - mv = 0,$$

이므로 $w = 0$이다. 즉 승강기는 정지하게 된다. (또한 $J = Mu > 0$이므로 케이블은 느슨해지는 것이 아니라 실제로 팽팽하게 당겨지며, 이는 우리의 가정과 맞는다.) 충돌 후 질량은 다시 M과 M이 되어 균형을 이루므로 모든 것이 정지한 채로 있다.

생각해 보기 충돌 직전의 전체 "케이블 방향 운동량"은 왜 0일까?

충돌 전에 세 물체에 작용하는 외력 가운데 운동 방향으로 작용하는 것은 중력뿐이며, 앞에서 정한 양의 방향으로 그 합은 $Mg - (M - m)g - mg = 0$이다. (도르래의 반작용은 일을 하지 않고, 케이블은 계 내부에 있다.) 따라서 이 운동량은 내내 처음 값인 0을 유지한다. 충돌 역시 이를 바꿀 수 없다.

잃어버린 에너지

계는 정지 상태에서 시작하여 정지 상태로 끝나므로, 잃어버린 역학적 에너지는 처음과 끝 사이의 중력 위치 에너지(potential energy) 감소량과 같다. 낙하하는 동안 승강기가 s_1만큼 올라가고(따라서 평형추는 s_1만큼 내려가고) 타일이 s_2만큼 떨어진다고 하자. 타일이 간격 h를 메우므로 $s_1 + s_2 = h$이다. 위치 에너지의 변화량은

$$(M - m)g\, s_1 - Mg\, s_1 - mg\, s_2 = -mg(s_1 + s_2) = -mgh.$$

이다. 충돌 후에는 아무것도 움직이지 않으므로, 잃어버린 에너지는 요구된 대로 mgh이다. 충돌 직전에 있던 운동 에너지는 충돌에서 모두 사라진다. 이 논증은 t의 값을 전혀 사용하지 않는다는 점에 주목하자.

검산

- $m \to 0$이면 $a \to 0$이고 $t \to \sqrt{2h/g}$인데, 이는 정지한 바닥으로의 자유낙하이다. 두 식 모두 이 검사를 통과하므로, 이것으로는 둘을 구별할 수 없다.
- $M = 5, m = 1, h = 1, g = 9.8$로 두고 운동을 수치적으로 한 단계씩 계산하면 $t \approx 0.4286\,\text{s}$를 얻으며, 이는 $\sqrt{9/49} \approx 0.4286$과 일치한다. 인쇄된 식은 $\sqrt{8/49} \approx 0.404\,\text{s}$를 준다.
- 같은 시뮬레이션에서 충돌 직전의 운동 에너지는 유효숫자 다섯 자리까지 mgh와 같고, 충돌 후의 속력은 반올림 오차 범위에서 0이다.

흔한 실수

- 승강기의 질량을 M에 타일을 **더한** 것으로 보는 것: 그러면 계가 정지 상태에서 출발할 수 없다.
- 평형추의 관성을 잊어 승강기의 가속도를 $mg/(M-m)$으로 구하는 것.
- 충돌에서 승강기와 타일만으로 선운동량 보존을 적용하는 것: 이는 케이블의 충격 장력을 무시한 것이다.

STEP 너머

여기서 사용한 "케이블 방향 운동량"은 **일반화 운동량**(generalised momentum)이다. 자유도(degree of freedom)가 하나인 계에서 좌표는 도르래를 지나간 케이블의 길이이다. 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)은 이를 체계적으로 다룬다. 힘이 알짜 효과를 주지 않는 좌표마다 보존되는 일반화 운동량이 하나씩 대응하며, 충격적인 구속 조건(constraint)도 같은 방식으로 다룬다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 줄과 도르래로 연결된 계, 그리고 충돌에서의 충격량과 에너지를 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.