풀이

STEP II 1989, 문제 10

순수수학 • 직선과 평면

> **STEP II 1989, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q10

핵심 아이디어

공간에서 두 직선이 정확히 한 점에서 만나지 않는 경우는 세 가지이다. 두 직선이 같은 직선일 수도 있고, 평행할 수도 있고, 서로 다른 평면에 놓여 엇갈리는 **꼬인 위치**(*skew*)에 있을 수도 있다. 따라서 "정확히 한 점"이 되려면 두 조건이 필요하다. 방향이 평행하지 않아야 하고, 두 직선이 한 평면 위에 있어야 한다. 외적(cross product)은 이 두 조건을 한꺼번에 다룬다. 평면의 경우, 교선은 두 법선벡터의 외적 방향으로 놓이며, 마지막 부분은 사실 첫 부분이 모습을 바꾸어 다시 나타난 것이다.

풀이

첫 부분: 두 직선이 정확히 한 점에서 만나는 조건

두 직선은 $\mathbf{a}+\lambda\mathbf{u}=\mathbf{b}+\mu\mathbf{v}$인 곳에서 만난다. 즉

$$\lambda\mathbf{u}-\mu\mathbf{v}=\mathbf{b}-\mathbf{a}.$$

인 곳에서 만난다. 이것들이 진짜 직선이 되려면 $\mathbf{u}\neq\mathbf{0}$이고 $\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$이어야 한다. 그러면 다음이 성립한다.

- $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$가 평행하면($\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\mathbf{0}$), 두 직선은 평행하고 서로 다르거나(공통점 없음) 일치한다(공통점이 무수히 많음). 어느 쪽이든 정확히 한 점은 아니다.
- $\mathbf{u}\times\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$이면 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$는 한 평면을 생성(span)하고, 위 방정식은 $\mathbf{b}-\mathbf{a}$가 그 평면 위에 있을 때, 즉 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$에 수직일 때 그리고 그때에만 해를 가진다. 해가 존재하면 그 해는 유일하다. $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$가 일차독립(linearly independent)이기 때문이다.

따라서 조건은

$$\mathbf{u} \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{v} \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{u} \times \mathbf{v} \neq \mathbf{0}, \quad (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0.$$

이다. (처음 두 조건은 세 번째 조건에 포함되지만, 밝혀 두는 것이 좋다.) 마지막 조건이 성립하지 않으면 두 직선은 꼬인 위치에 있다.

둘째 부분: 두 평면

법선벡터(normal vector)는 $\mathbf{n}_1 = (1, 1, b)$와 $\mathbf{n}_2 = (b, b, 1)$이고,

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \big(1 - b^2,\ b^2 - 1,\ 0\big) = (1 - b^2)(1, -1, 0).$$

이다. 두 평면이 한 직선에서 만나지 않는 것은 법선벡터가 평행할 때 그리고 그때에만이며, 여기서는 $1 - b^2 = 0$일 때, 즉 $b = 1$ 또는 $b = -1$일 때이다.

- $b = 1$: 두 방정식 모두 $x + y + z = 3$이 된다.
- $b = -1$: 두 방정식은 $x + y - z = 1$과 $-x - y + z = -1$이고, 역시 같은 평면이다.

따라서 두 경우 모두 두 평면은 평행하게 떨어져 있는 것이 아니라 일치한다.

이제 $b \neq \pm 1$이라 하자. 교선은 $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$ 방향으로 놓이므로 $\mathbf{u} = (1, -1, 0)$을 쓸 수 있다. 교선 위의 점을 찾기 위해, x와 y가 $s = x + y$의 형태로만 나타난다는 점에 주목하자.

$$s + bz = b + 2, \qquad bs + z = 2b + 1.$$

둘째 식에서 첫째 식의 b배를 빼면 $(1 - b^2)z = 1 - b^2$이므로 $z = 1$이고($b^2 \neq 1$이므로 나눌 수 있다), 따라서 $s = 2$이다. 그러므로 교선은 $x + y = 2$, $z = 1$이며, b와 무관하다.

이 직선 위에서 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = 0$, 즉 $x - y = 0$을 만족하는 점 $\mathbf{a}$가 필요하다. $x + y = 2$와 함께 쓰면 $x = y = 1$이므로

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b \neq \pm 1.$$

이다. 점 $\mathbf{a}$는 원점에서 이 직선에 내린 수선의 발이다.

마지막 부분

두 방정식 $(*)$를 모두 만족하는 점들은 $b \neq \pm 1$일 때 위의 직선을 이루고, $b = \pm 1$일 때 평면 전체를 이룬다. 두 경우를 나누어 다룬다.

생각해 보기 $b = \pm 1$일 때 두 방정식을 모두 만족하는 점의 집합은 무엇인가?

두 평면이 일치함을 앞에서 보였으므로, 그것은 공집합이 아니라 평면 전체이다. 이 사실이 그 경우들의 답을 완전히 바꾼다.

$b \neq \pm 1$**인 경우.** 주어진 직선이 직선 $\mathbf{r} = (1,1,1) + \lambda(1,-1,0)$과 정확히 한 점에서 만나야 한다. 첫 부분의 결과를 $\mathbf{a} = (1,1,1)$, $\mathbf{u} = (1,-1,0)$, $\mathbf{b} = (0,0,c)$, $\mathbf{v} = (1,d,0)$에 적용하면

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (0,\,0,\,d+1), \qquad (\mathbf{b}-\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (-1,-1,c-1) \cdot (0,0,d+1) = (c-1)(d+1).$$

이다. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$이어야 하므로 $d \neq -1$이고, 그러면 $(c-1)(d+1) = 0$에서 $c = 1$이어야 한다. 따라서 조건은 $c = 1$이고 $d \neq -1$인 것이다. (직접 확인하면: 주어진 직선은 $z = c$이므로 $c = 1$일 때에만 $z = 1$과 만나고, 그때 $x + y = \mu(1+d) = 2$는 $d \neq -1$이면 유일한 해 $\mu = 2/(1+d)$를 가진다.)

$b = \pm 1$**인 경우.** 이제 주어진 직선이 한 평면과 정확히 한 점에서 만나야 한다. 점 $(\mu, d\mu, c)$는 $\mu(1+d) = 3-c$일 때 $x+y+z = 3$ 위에 있고($b = 1$인 경우), $\mu(1+d) = 1+c$일 때 $x+y-z = 1$ 위에 있다($b = -1$인 경우). 각 방정식은 $1+d \neq 0$일 때 그리고 그때에만 μ에 대한 해를 정확히 하나 가진다. $d = -1$이면 직선이 평면과 평행하여 해가 없거나 무수히 많다. 이 경우 c는 어떤 값이어도 된다.

답. 그러한 점이 정확히 하나 존재할 필요충분조건은

$$d \neq -1 \quad \text{그리고} \quad \big(c = 1 \text{ 또는 } b = \pm 1\big),$$

이며, 간단히 $d \neq -1$이고 $(b^2-1)(c-1) = 0$이라고 쓸 수 있다.

검산

- $(1+\lambda, 1-\lambda, 1)$을 $(*)$에 대입하면 모든 b와 λ에 대해 $2+b = b+2$, $2b+1 = 2b+1$이다.
- $b = 2$, $c = 1$, $d = 3$이면 $\mu = \frac{1}{2}$, 즉 점 $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1)$이다. $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + 2 = 4 = b+2$이고 $1+3+1 = 5 = 2b+1$이다.
- 컴퓨터로 $\{-3, \ldots, 3, \frac{1}{2}, -\frac{5}{3}\}$의 모든 b, c, d(729가지 경우)에 대해 정확한 산술로 μ를 직접 구해 보았고, 해의 개수는 위의 조건이 성립할 때 그리고 그때에만 하나였다.

흔한 실수

- 두 직선이 평행하지 않다는 이유만으로 한 점에서 만난다고 말하는 것. 3차원에서는 꼬인 위치에 있을 수 있다.
- $b = \pm 1$일 때 두 평면이 평행하게 떨어져 있다고 가정하고, 점이 전혀 없다고 결론짓는 것. 우변을 확인해 보라. 두 평면은 일치한다.

► $1 - b^2$이 0이 아닌 이유를 밝히지 않고 $1 - b^2$으로 나누는 것.

STEP 너머

이 문제는 사실 작은 연립일차방정식(system of linear equations)이다. 미지수가 세 개인 방정식 두 개는 계수행렬(coefficient matrix)의 계수(rank)가 2이면 직선 모양의 해를 가지고, 계수가 1이면 평면 모양의 해를 가지거나 해가 없다. 직선의 매개변수 표현을 덧붙이면 μ에 대한 과결정 연립방정식(overdetermined system)이 되고, "해가 정확히 하나"라는 것은 계수와 일관성(consistency)에 관한 명제가 된다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 여기 나오는 행 관점(평면들이 만나는 모습)과 열 관점(벡터들의 일차결합)으로부터 이 모든 내용을 쌓아 올린다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.