풀이

STEP II 1989, 문제 1

순수수학 • 삼차방정식의 삼각함수 해법

STEP II 1989, 1번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/89-s2-q1

핵심 아이디어

항등식(identity)에 따르면 $z = \cos\theta$일 때 $4z^3 - 3z$는 모양만 바꾼 $\cos 3\theta$이다. 따라서 삼차식(cubic)을 $|k| \leq 1$인 $4z^3 - 3z = k$ 꼴로 바꿀 수 있다면, 이 방정식을 푸는 것은 $\cos 3\theta = k$를 푸는 것과 같고, 이 방정식의 세 해는 쉽게 구할 수 있다. 두 치환(substitution)은 서로 다른 일을 한다. 평행이동 $y = x + a$는 제곱항을 없애고, 배율 조정 $z = by$는 남은 계수의 비를 $4:3$으로 맞춘다.

풀이

항등식

덧셈정리(addition formulae)와 $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$를 이용하면

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta \\ &= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta \\ &= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2(1 - \cos^2\theta)\cos\theta \\ &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta,\end{aligned}$$

이므로 원하는 식이 성립한다.

삼차식 간단히 하기

$y = x + a$로 두면 $x = y - a$이고, $24(y-a)^3 - 72(y-a)^2 + \cdots$에서 y^2의 계수(coefficient)는 $-72a - 72$이다. 이 항을 없애려면 $a = -1$, 즉 $x = y + 1$이어야

한다. 그러면

$$\begin{aligned}&24(y+1)^3-72(y+1)^2+66(y+1)-19\\&\quad=(24y^3+72y^2+72y+24)-(72y^2+144y+72)\\&\qquad+(66y+66)-19\\&\qquad\qquad=24y^3-6y-1,\end{aligned}$$

이므로 $(*)$는

$$24y^3-6y=1.$$

이 된다. 이제 $y=z/b$를 대입하면

$$\frac{24}{b^3}z^3-\frac{6}{b}z=1.$$

생각해 보기 좌변이 $4z^3-3z$의 상수배가 되도록 하려면 b를 어떻게 골라야 할까?

z^3과 z의 계수의 비가 $4:-3$이어야 하므로

$$\frac{24/b^3}{6/b}=\frac{4}{3}\quad\Longrightarrow\quad\frac{4}{b^2}=\frac{4}{3}\quad\Longrightarrow\quad b^2=3.$$

$b=\sqrt{3}$으로 잡는다. 그러면 방정식은 $\dfrac{8}{\sqrt{3}}z^3-\dfrac{6}{\sqrt{3}}z=1$이 되고, 양변에 $\frac{\sqrt{3}}{2}$를 곱하면

$$4z^3-3z=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

따라서 $a=-1$, $b=\sqrt{3}$, $k=\frac{\sqrt{3}}{2}$이고 $z=\sqrt{3}\,(x-1)$이다. (대신 $b=-\sqrt{3}$으로 잡으면 $k=-\frac{\sqrt{3}}{2}$가 되지만 결국 같은 근을 얻는다.)

근 구하기

$|k|\le 1$이므로 $z=\cos\theta$로 쓸 수 있고, 항등식에 의해 방정식은

$$\cos 3\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos 30^\circ.$$

가 된다. 따라서 $3\theta=30^\circ,\ 390^\circ,\ 750^\circ$이고, $\theta=10^\circ,\ 130^\circ,\ 250^\circ$이다. 이들은 서로 다른 세 $\cos\theta$ 값을 주고, 삼차방정식의 근(root)은 많아야 세 개이므로 이것이 근의 전부이다.

$$z=\cos 10^\circ,\quad \cos 130^\circ,\quad \cos 250^\circ.$$

치환을 되돌리면 $x = 1 + \dfrac{z}{\sqrt{3}}$이므로

$$x_1 = 1 + \frac{\cos 10^\circ}{\sqrt{3}} = 1.5686\ldots \approx 1.57,$$
$$x_2 = 1 + \frac{\cos 130^\circ}{\sqrt{3}} = 0.6289\ldots \approx 0.629,$$
$$x_3 = 1 + \frac{\cos 250^\circ}{\sqrt{3}} = 0.8025\ldots \approx 0.803.$$

모든 삼차식에 통하지는 않는다

최고차항의 계수가 1인(monic) 일반적인 삼차방정식 $x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$에서는 평행이동이 저절로 정해진다. $x = y - a$로 둔 뒤 y^2의 계수는 $\alpha - 3a$이므로 $a = \frac{\alpha}{3}$이고, $p = \beta - \frac{\alpha^2}{3}$인 $y^3 + py + q = 0$을 얻는다. $y = z/b$를 대입하고 $4b^3$을 곱하면

$$4z^3 + 4pb^2 z + 4qb^3 = 0,$$

이고, 이것을 $4z^3 - 3z$에 맞추려면 $4pb^2 = -3$, 즉 $b^2 = -\dfrac{3}{4p}$이어야 한다. 이 식은 $p < 0$일 때에만 실수해를 가진다.

반례(counterexample)는

$$x^3 + 3x - 4 = 0.$$

이다. 여기서 $\alpha = 0$이므로 $a = 0$이고 $p = 3 > 0$이다. 그러면 $b^2 = -\frac{1}{4}$이어야 하는데, 이를 만족하는 실수 b는 없다. 따라서 이 방정식은 결코 $4z^3 - 3z = k$ 꼴로 바꿀 수 없다. (이 방정식에도 근은 있다. $(x-1)(x^2+x+4) = 0$으로 인수분해되고, 이차식의 판별식(discriminant)은 $-15 < 0$이므로 $x = 1$이 유일한 실근이다. 실패하는 것은 방법이지 방정식이 아니다.)

$p < 0$일 때에도 다음 단계에서 방법이 실패할 수 있다. $x^3 - 3x - 4 = 0$에서 $x = 2z$로 치환하면 $4z^3 - 3z = 2$가 된다. 그런데 $|\cos 3\theta| \le 1$이므로 $\cos 3\theta = 2$인 실수 θ는 없다.

검산

- 세 근의 합은 $\frac{72}{24} = 3$, 곱은 $\frac{19}{24}$이어야 한다. 실제로 cos 항들의 합은 0이고 ($\cos 10^\circ + \cos 130^\circ + \cos 250^\circ = 0$), 수치로 계산하면 $1.5686 \times 0.6289 \times 0.8025 = 0.7917 \approx \frac{19}{24}$이다.
- $x = 1.5686$을 $24x^3 - 72x^2 + 66x - 19$에 대입하면 계산기의 정확도 범위에서 0이 된다. 나머지 두 근도 마찬가지이다.

흔한 실수

- $\theta = 10°$에서 멈추는 것: 나머지 두 근은 $3\theta = 390°$와 $750°$에서 나온다.
- a의 부호를 틀리는 것: $y = x + a$이고 $x = y + 1$이면 $a = -1$이지 $+1$이 아니다.
- 반례로 $p < 0$이고 $|k| \leq 1$인 삼차식을 고르는 것: 이런 식은 이 방법으로 완벽하게 풀린다. 실패한다고 주장하기 전에 $b^2 > 0$인지, $|k| \leq 1$인지 확인하자.

STEP 너머

이 방법은 삼차식이 세 실근을 가질 때 정확히 통한다. 이것이 바로 "기약의 경우(casus irreducibilis)"로, 답이 모두 실수인데도 카르다노(Cardano)의 공식을 쓰면 복소수의 세제곱근을 거쳐야만 하는 경우이다. $|k| > 1$일 때에는 $\cosh 3u = 4\cosh^3 u - 3\cosh u$이므로 cos 대신 cosh를 써서 같은 아이디어를 적용할 수 있다. $x^3 - 3x - 4 = 0$에 적용하면 실근 $x = 2\cosh\left(\frac{1}{3}\operatorname{arcosh} 2\right) \approx 2.196$을 얻는다. 어떤 다항방정식이 애초에 거듭제곱근으로 풀리는가(solvable by radicals)라는 더 깊은 질문은 갈루아 이론(Galois theory)으로 이어진다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)는 출발점으로 좋은 책이고, Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 세제곱근의 기하학을 보여 준다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.