풀이

STEP I 1989, 문제 9

순수수학 • 그래프의 변환

> **STEP I 1989, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q9

핵심 아이디어

기본이 되는 삼차함수(cubic)의 그래프를 그리고 나면, 나머지 그래프는 모두 같은 곡선을 좌표 변환(change of coordinates)을 거쳐 본 것일 뿐이다. 치환 $X = ax + b$, $Y = cy + d$는 각 방향으로의 늘이기(stretch)(또는 대칭이동(reflection))에 평행이동(translation)이 이어진 것에 지나지 않으며, 극점(turning point)을 극점으로 옮긴다. 따라서 해야 할 일은 원래 삼차함수의 두 극점을 찾고, 그 점들이 어디로 옮겨지는지 추적하는 것뿐이다.

풀이

기본 그래프

$y = \frac{1}{8}(x^3 - 12x) = \frac{1}{8}x(x^2 - 12)$로 쓰자. 그러면

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{3x^2 - 12}{8} = \frac{3(x-2)(x+2)}{8}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{6x}{8} = \frac{3x}{4}.$$

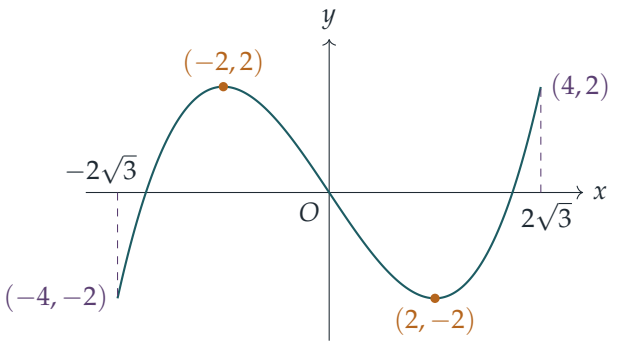
기울기(gradient)는 $x = \pm 2$에서 0이다.

- $x = -2$에서: $y = \frac{1}{8}(-8 + 24) = 2$이고 $y'' = -\frac{3}{2} < 0$이므로, $(-2, 2)$는 극대점(local maximum)이다.
- $x = 2$에서: $y = \frac{1}{8}(8 - 24) = -2$이고 $y'' = \frac{3}{2} > 0$이므로, $(2, -2)$는 극소점(local minimum)이다.

그 밖의 유용한 특징은 다음과 같다.

- 곡선은 $x(x^2 - 12) = 0$인 곳, 즉 $x = 0$과 $x = \pm 2\sqrt{3} \approx \pm 3.46$에서 축과 만난다.

- 이 함수는 기함수(odd function)이므로 그래프는 원점에 대해 위수 2의 회전대칭(rotational symmetry)을 가지며, 원점은 변곡점(point of inflection)이기도 하다. 그곳에서의 기울기는 $-\frac{3}{2}$이다.
- 양 끝에서 $y(4) = \frac{1}{8}(64 - 48) = 2$이고 $y(-4) = -2$이다. 따라서 곡선은 정확히 $x = 4$에서 극대점의 높이까지 다시 올라온다.



극점이 극점으로 옮겨지는 이유

생각해 보기 좌표를 바꿀 때, 새 극점이 단지 원래 극점의 상이라는 것을 어떻게 알 수 있을까?

$X = ax + b$, $Y = cy + d$이고 $a, c \neq 0$이면, 연쇄법칙(chain rule)에 의해

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dY/dx}{dX/dx} = \frac{c}{a}\frac{dy}{dx},$$

이고, 이 값은 정확히 dy/dx가 0인 곳에서 0이 된다. 따라서 새 극점은 $(-2, 2)$와 $(2, -2)$의 상이다. ($c/a < 0$이면 그림이 대칭이동되어 극대와 극소의 역할이 서로 바뀐다.) 기하학적으로 보면 다음과 같다.

- $X = \frac{1}{2}x$는 그래프를 가로 방향으로 2분의 1로 줄인다;
- $Y = \frac{1}{2}y$는 그래프를 세로 방향으로 2분의 1로 줄인다;
- 그다음 X 또는 Y에 1을 더하면 그래프가 오른쪽 또는 위쪽으로 1만큼 이동한다.

변환된 네 그래프

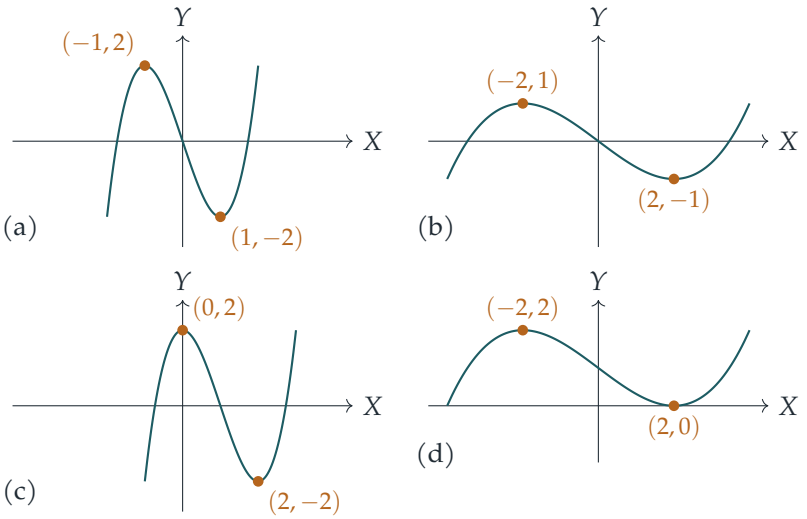
각 변환을 $(-2, 2)$, $(2, -2)$와 범위 $-4 \leq x \leq 4$에 적용하면 다음과 같다.

(a) $X = \frac{1}{2}x$, $Y = y$: 극대점 $(-1, 2)$, 극소점 $(1, -2)$, 범위 $-2 \leq X \leq 2$. 곡선은 $Y = X^3 - 3X$이다.

(b) $X = x$, $Y = \frac{1}{2}y$: 극대점 $(-2,1)$, 극소점 $(2,-1)$, 범위 $-4 \le X \le 4$. 곡선은 $16Y = X^3 - 12X$이다.

(c) $X = \frac{1}{2}x + 1$, $Y = y$: 극대점 $(0,2)$, 극소점 $(2,-2)$, 범위 $-1 \le X \le 3$. 이것은 그래프 (a)를 오른쪽으로 1만큼 옮긴 것이며, 변곡점은 $(1,0)$이다.

(d) $X = x$, $Y = \frac{1}{2}y + 1$: 극대점 $(-2,2)$, 극소점 $(2,0)$, 범위 $-4 \le X \le 4$. 이것은 그래프 (b)를 위로 1만큼 옮긴 것이며, 변곡점은 $(0,1)$이다. 이 그래프는 극소점에서 X축에 접한다.



마지막 부분

$a, c \neq 0$이어야 하며(그렇지 않으면 그래프가 직선으로 찌그러진다), 이때 새 그래프의 극점은

$$(-2a + b,\ 2c + d) \quad \text{와} \quad (2a + b,\ -2c + d).$$

이다. 이 두 점은 순서에 상관없이 $(0,0)$과 $(1,1)$이 되어야 하므로, 두 개의 연립일차방정식(linear system)을 얻는다.

경우 1: $(-2,2) \mapsto (0,0)$이고 $(2,-2) \mapsto (1,1)$인 경우. 그러면 $-2a + b = 0$이고 $2a + b = 1$이므로 $b = \frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{4}$이다. 또 $2c + d = 0$, $-2c + d = 1$이므로 $d = \frac{1}{2}$, $c = -\frac{1}{4}$이다.

경우 2: $(-2,2) \mapsto (1,1)$이고 $(2,-2) \mapsto (0,0)$인 경우. 같은 방법으로 $a = -\frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{4}$, $d = \frac{1}{2}$이다.

따라서 한 답은

$$a = \tfrac{1}{4}, \quad b = \tfrac{1}{2}, \quad c = -\tfrac{1}{4}, \quad d = \tfrac{1}{2},$$

이고, 다른 답은 $a = -\frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{4}$, $d = \frac{1}{2}$이다.

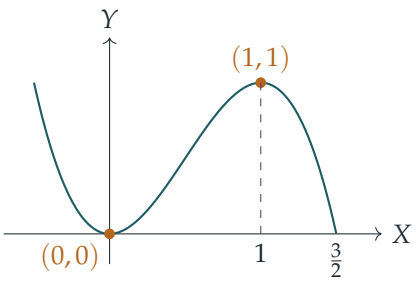
새 곡선을 직접 구해 볼 만하다. 경우 1에서 $x = 4X - 2$이고 $y = 2 - 4Y$이므로

$$\begin{aligned} 8(2-4Y) &= (4X-2)^3 - 12(4X-2) \\ &= 64X^3 - 96X^2 + 48X - 8 - 48X + 24 \\ &= 64X^3 - 96X^2 + 16, \end{aligned}$$

이고, 이를 정리하면

$$Y = 3X^2 - 2X^3 = X^2(3-2X).$$

이다. 이 곡선은 $Y' = 6X(1-X)$이므로, 그 극점은 실제로 $(0,0)$에서의 극소점과 $(1,1)$에서의 극대점이다. 경우 2도 정확히 같은 곡선을 준다. 원래 삼차함수가 기함수이므로 (x,y)를 $(-x,-y)$로 바꾸어도 원래 그래프는 변하지 않는데, 이것이 두 경우 사이의 유일한 차이이기 때문이다.



$-4 \le x \le 4$에 대해 이 곡선은 $(-\frac{1}{2}, 1)$에서 $(\frac{3}{2}, 0)$까지 이어진다.

검산

- $Y = 3X^2 - 2X^3$에 $X = 0$과 $X = 1$을 대입하면 각각 0과 1이 나오고, $Y' = 6X(1-X)$는 두 점 모두에서 0이 된다.
- 변환된 각 그래프는 곡선이 범위의 한쪽 끝에서 극점의 높이로 돌아온다는 원래 성질을 그대로 유지한다. 예를 들어 (d)에서는 $Y = 2$가 $X = 4$에서, $Y = 0$이 $X = -4$에서 성립한다.
- 수치로 확인해 보면, $x = 1$에서 $y = -\frac{11}{8}$이다. 경우 1에서 이는 $X = 0.75, Y = 0.84375$를 주며, 실제로 $3(0.75)^2 - 2(0.75)^3 = 0.84375$이다.

흔한 실수

- 늘이기의 방향을 잘못 잡는 것: $X = \frac{1}{2}x$는 그래프를 넓게가 아니라 **좁게** 만든다. $x = 2$에 있던 점이 $X = 1$로 옮겨지기 때문이다.

- 정의역(domain)도 함께 변환하는 것을 잊는 것: 그래프 (c)는 $-4 \leq X \leq 4$가 아니라 $-1 \leq X \leq 3$ 위에서 그려진다.
- 극점을 대응시키는 다른 순서를 알아채지 못하고 마지막 부분에 해를 하나만 제시하는 것(어느 하나만으로도 충분하지만, 첫 번째 경우에서 $c < 0$이라는 점은 놓치기 쉽다).

STEP 너머

변환 $X = ax + b, Y = cy + d$는 아핀 변환(affine transformation)이며, 마지막 부분은 두 극점을 갖는 모든 삼차함수의 그래프가 이러한 변환 하나로 표준 곡선 $Y = 3X^2 - 2X^3$ 위로 옮겨질 수 있음을 보여 준다. 이 곡선은 컴퓨터 그래픽스에서 쓰이는 "smoothstep" 함수이다. 이처럼 변환군(group of transformations)에 대해 곡선을 분류하는 것은 기하학과 선형대수학(linear algebra) 전반에 흐르는 주제이다. 이 이야기의 행렬 쪽 측면은 Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.