풀이

STEP I 1989, 문제 8

순수수학 • 배각 공식

> **STEP I 1989, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q8

핵심 아이디어

드무아브르 정리(de Moivre's theorem)를 쓰면 $\cos n\theta$는 $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n$의 실수부(real part)가 되고, $\sin^2\theta$를 $1-\cos^2\theta$로 바꾸면 $\cos\theta$에 대한 다항식(polynomial)이 남는다. 마지막 부분의 6차 다항식(sextic)은 방금 구한 두 다항식의 결합처럼 보이므로, 그런 결합을 찾아본다. 알고 보면 그것은 $\cos 6\theta - \cos 4\theta$의 절반이고, $\cos 6\theta = \cos 4\theta$를 푸는 것은 쉽다.

풀이

풀이 전체에서 $c = \cos\theta$, $s = \sin\theta$라 쓰자. 그러면 $s^2 = 1 - c^2$이다.

소문항 (i)

드무아브르 정리에 의해 $\cos 4\theta + \mathrm{i}\sin 4\theta = (c + \mathrm{i}s)^4$이다. 이항정리(binomial theorem)로 전개하여 실수인 항($\mathrm{i}s$의 짝수 거듭제곱이 들어 있는 항)만 남기면

$$\begin{aligned}\cos 4\theta &= c^4 - \tbinom{4}{2}c^2s^2 + s^4 \\ &= c^4 - 6c^2(1-c^2) + (1-c^2)^2 \\ &= c^4 - 6c^2 + 6c^4 + 1 - 2c^2 + c^4 \\ &= 8c^4 - 8c^2 + 1,\end{aligned}$$

이고, 이것이 구하는 항등식(identity)이다.

소문항 (ii)

같은 방법으로 $(c+\mathrm{i}s)^6$의 실수부를 구하면

$$\cos 6\theta = c^6 - 15c^4s^2 + 15c^2s^4 - s^6,$$

이다. 여기서 $\binom{6}{2} = \binom{6}{4} = 15$와 $\mathrm{i}^2 = -1$, $\mathrm{i}^4 = 1$, $\mathrm{i}^6 = -1$을 이용했다. $u = c^2$이라 두면 $s^2 = 1-u$이므로

$$\begin{aligned}\cos 6\theta &= u^3 - 15u^2(1-u) + 15u(1-u)^2 - (1-u)^3 \\ &= u^3 - 15u^2 + 15u^3 + 15u - 30u^2 + 15u^3 - 1 + 3u - 3u^2 + u^3 \\ &= 32u^3 - 48u^2 + 18u - 1 \\ &= 32c^6 - 48c^4 + 18c^2 - 1,\end{aligned}$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

방정식

좌변을 $p(x) = 16x^6 - 28x^4 + 13x^2 - 1$이라 하자.

> **생각해 보기** 두 항등식 중 어느 것과도 같지 않은 다항식을 다루는 데 두 항등식이 어떻게 도움이 될까?

계수(coefficient)를 비교해 보자. 최고차항의 계수 16은 32의 절반이고, 상수항 -1은 -2의 절반이다. 이는 (ii)에서 (i)을 빼 보라는 암시이다.

$$\cos 6\theta - \cos 4\theta = 32c^6 - 56c^4 + 26c^2 - 2 = 2\,p(c).$$

따라서 $x = \cos\theta$이면

$$p(x) = 0 \iff \cos 6\theta = \cos 4\theta.$$

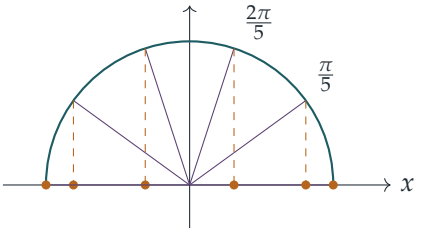
이다. 그런데 $\cos A = \cos B$일 필요충분조건은 어떤 정수 k에 대하여 $A = \pm B + 2k\pi$인 것이다. 여기서는 다음을 얻는다.

$$6\theta = 4\theta + 2k\pi \;\Rightarrow\; \theta = k\pi, \qquad \text{또는} \qquad 6\theta = -4\theta + 2k\pi \;\Rightarrow\; \theta = \frac{k\pi}{5}.$$

첫 번째 해의 집합은 두 번째에 포함되므로 해는 $\theta = k\pi/5$이고, 이에 대응하는 $x = \cos\theta$의 값은

$$\cos 0 = 1, \quad \cos\tfrac{\pi}{5}, \quad \cos\tfrac{2\pi}{5}, \quad \cos\tfrac{3\pi}{5} = -\cos\tfrac{2\pi}{5}, \quad \cos\tfrac{4\pi}{5} = -\cos\tfrac{\pi}{5}, \quad \cos\pi = -1.$$

이다. 다른 k 값은 이 값들을 되풀이할 뿐이다. 이들은 **서로 다른** 여섯 개의 수이고(코사인은 $[0,\pi]$에서 순감소(strictly decreasing)한다), p의 차수(degree)는 6이므로, 이것들이 실근이든 복소근이든 p의 근(root) 전부이다. 특히 치환 $x = \cos\theta$로는 $-1 \le x \le 1$ 범위만 다룰 수 있지만, 그 구간 밖의 근을 놓친 것은 아니다. 더 찾을 근이 남아 있지 않기 때문이다.



하지만 아직은 답으로 받아들일 수 없다. 수치 근삿값은 허용되지 않으며 코사인 값을 정확히 구해야 하기 때문이다. $x = 1$이 근이므로 $x = -1$도 근이고(p는 우함수(even function)이다), 따라서 $x^2 - 1$은 인수(factor)이다. 나누어 보면(또는 계수를 비교하면)

$$p(x) = (x^2 - 1)(16x^4 - 12x^2 + 1).$$

이다. 4차식(quartic) 인수는 x^2에 대한 이차식(quadratic)이므로

$$x^2 = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 64}}{32} = \frac{12 \pm 4\sqrt{5}}{32} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{8}.$$

이다. 여기서 다음에 주목하자.

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 = \frac{6+2\sqrt{5}}{16} = \frac{3+\sqrt{5}}{8}, \qquad \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = \frac{6-2\sqrt{5}}{16} = \frac{3-\sqrt{5}}{8}.$$

x^2의 두 값은 모두 양수이므로 각각에서 실수 x 값이 두 개씩 나온다. 따라서 방정식의 실근은 다음 여섯 개의 수이다.

$$x = \pm 1, \qquad x = \pm\frac{1+\sqrt{5}}{4}, \qquad x = \pm\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

덤으로, 위의 목록과 크기를 맞추어 보면($\cos\frac{\pi}{5} > \cos\frac{2\pi}{5} > 0$) 잘 알려진 값 $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$와 $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$를 얻는다.

검산

- $\theta = 0$에서 두 항등식은 모두 $1 = 1$이 되고, $\theta = \frac{\pi}{2}$에서 (i)은 $1 = 1$, (ii)는 $-1 = -1$이 된다.
- p의 계수의 합은 $16 - 28 + 13 - 1 = 0$이므로 $x = 1$이 근임이 확인된다.
- 수치적으로 $\frac{1+\sqrt{5}}{4} \approx 0.80902 = \cos 36^\circ$이고 $\frac{\sqrt{5}-1}{4} \approx 0.30902 = \cos 72^\circ$이며, 두 값에서 p는 (반올림 오차 범위 안에서) 0이 된다.

흔한 실수

- $6\theta = -4\theta + 2k\pi$에서 나오는 해를 빠뜨려 $x = \pm 1$만 구하는 것.

- 답을 $\cos\frac{\pi}{5}$ 등의 꼴이나 소수로 남겨 두는 것. 문제는 정확한 무리수(surd) 꼴을 요구한다.
- $|x| > 1$인 근이 없는 이유를 설명하지 않는 것. 차수를 세어 보면 해결된다.

STEP 너머

$\cos n\theta$를 $\cos\theta$로 나타내는 다항식은 체비쇼프 다항식(Chebyshev polynomial) T_n이다. 따라서 (i)과 (ii)는 $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$, $T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$이라는 뜻이다. 체비쇼프 다항식은 수치해석(numerical analysis)에서 핵심적인 역할을 하며, 그 근은 다항식 보간(polynomial interpolation)에 가장 좋은 점들을 준다. $\cos\frac{\pi}{5}$에 $\sqrt{5}$가 나타나는 것은 정오각형(regular pentagon)의 기하와 황금비(golden ratio)를 반영한다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석)는 드무아브르 정리와 단위근(roots of unity)을 기하적으로 살펴보기에 아주 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.