풀이

STEP I 1989, 문제 7

순수수학 • 곡선 그리기와 최적화

> **STEP I 1989, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q7

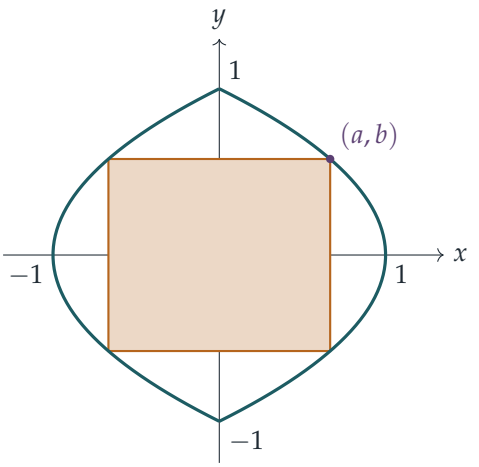
핵심 아이디어

곡선이 두 좌표축에 대하여 모두 대칭이므로, 가장 큰 직사각형은 원점을 중심으로 하고 한 꼭짓점이 제1사분면의 곡선 위에 있어야 할 것이다. 그러면 두 변수에 대한 탐색이 한 변수 함수의 최댓값 문제로 바뀐다. 일반적인 곡선에서도 $|y|$를 $1-|x|$의 거듭제곱으로 풀어 내기만 하면 같은 아이디어가 통한다.

풀이

개형 그리기

$y^2 \geq 0$이므로 $1-|x| \geq 0$이어야 하고, 따라서 $-1 \leq x \leq 1$이다. $x \geq 0$일 때 곡선은 $x = 1-y^2$, 즉 꼭짓점이 $(1,0)$이고 왼쪽으로 열린 포물선(parabola)이다. $x \leq 0$일 때는 그 거울상인 $x = y^2 - 1$이다. 두 호는 $(0, \pm 1)$에서 만나는데, 이 점에서 뾰족점(corner)을 이룬다(기울기 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = \mp\frac{1}{2}$와 $\pm\frac{1}{2}$가 일치하지 않는다). 또 두 호는 $(\pm 1, 0)$에서 x축과 수직으로 만난다. 이 곡선은 영역 $|x| + y^2 \leq 1$을 둘러싸는 닫힌 고리이며, 모서리가 둥근 마름모 모양이다.



가장 큰 직사각형

직사각형 $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$가 영역 $|x| + y^2 \leq 1$ 안에 놓여 있다고 하자. $A = \max(|x_1|, |x_2|)$, $B = \max(|y_1|, |y_2|)$로 놓는다. 꼭짓점은 i, j를 독립적으로 골라 만든 (x_i, y_j)이므로, 어떤 꼭짓점 하나는 $|x| = A$와 $|y| = B$를 동시에 만족한다. 그 꼭짓점이 영역 안에 있으므로 $A + B^2 \leq 1$이다. 그러면 직사각형 $[-A, A] \times [-B, B]$도 영역 안에 놓인다. $|x| \leq A$, $|y| \leq B$이면

$$|x| + y^2 \leq A + B^2 \leq 1.$$

이기 때문이다. 이 직사각형의 가로 길이는 $2A \geq x_2 - x_1$이고 세로 길이는 $2B \geq y_2 - y_1$이므로, 넓이가 원래 직사각형보다 작지 않다. 따라서 꼭짓점이 $(\pm a, \pm b)$이고 원점을 중심으로 하는 직사각형만 생각해도 되며, 꼭짓점을 곡선에 닿을 때까지 밀어내면 $a = 1 - b^2$, $0 \leq b \leq 1$이다.

생각해 보기 왜 원점을 중심으로 하는 직사각형만 살펴보아도 충분한가?

바로 위의 논증이 그 답이다. 각 변을 축으로부터의 두 거리 중 큰 쪽으로 바꾸어도 직사각형은 (대칭성에 의해) 곡선 안에 머물고, 결코 작아지지 않는다.

넓이는

$$S(b) = 4ab = 4b(1 - b^2) = 4b - 4b^3, \qquad S'(b) = 4 - 12b^2.$$

이다. $b = 1/\sqrt{3}$에서 $S'(b) = 0$이고, 그 앞에서는 $S' > 0$, 그 뒤에서는 $S' < 0$이며, $S(0) = S(1) = 0$이므로 이 점에서 최댓값(maximum)을 갖는다. 이때 $a = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$이고

$$S_{\max} = 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{8}{3\sqrt{3}} = \frac{8}{\sqrt{27}},$$

이므로 요구된 결과가 나온다.

일반적인 곡선

이제 $y^{2m} = (1-|x|)^n$을 생각하자. 좌변은 음이 아니고, n이 홀수이므로 $(1-|x|)^n$은 $1-|x|$와 부호가 같다. 따라서 이번에도 $|x| \le 1$이고, (양의) $2m$제곱근을 취하면

$$|y| = (1-|x|)^k, \qquad k = \frac{n}{2m} > 0.$$

이다. (n이 짝수라면 모든 x가 허용되어 곡선이 무한히 뻗어 나가므로 가장 큰 직사각형이 존재하지 않는다. 이것이 n이 홀수여야 하는 이유이다.) 이 곡선도 $(\pm 1, 0)$과 $(0, \pm 1)$을 지나고 두 좌표축에 대하여 대칭인 닫힌 고리이며, 영역 $|y| \le (1-|x|)^k$를 둘러싼다. $(1-|x|)^k$는 $|x|$가 커질수록 감소하므로, 앞에서와 같은 논증에 의해 꼭짓점이 $(\pm a, \pm b)$, $b = (1-a)^k$, $0 \le a \le 1$인 직사각형만 생각해도 된다. 그 넓이는

$$S(a) = 4a(1-a)^k.$$

이다. 미분하면

$$S'(a) = 4(1-a)^{k-1}[(1-a) - ka] = 4(1-a)^{k-1}[1-(1+k)a],$$

이고, 이는 $0 < a < \frac{1}{1+k}$에서 양수, $\frac{1}{1+k} < a < 1$에서 음수이다. $S(0) = S(1) = 0$이므로 최댓값은 $a = \frac{1}{1+k}$에서 나타나며, 이때 $1-a = \frac{k}{1+k}$이다.

$$S_{\max} = \frac{4}{1+k}\left(\frac{k}{1+k}\right)^k = \frac{4k^k}{(1+k)^{k+1}}.$$

$k = \frac{n}{2m}$, $1+k = \frac{n+2m}{2m}$을 대입하면 $2m$의 거듭제곱들이 $(2m)^{-k} \cdot (2m)^{k+1} = 2m$으로 모이므로

$$S_{\max} = \frac{8m\, n^{n/(2m)}}{(n+2m)^{(n+2m)/(2m)}} = 8m\left(\frac{n^n}{(n+2m)^{n+2m}}\right)^{1/(2m)}.$$

이다.

검산

- $m = n = 1$이면 $8\left(\frac{1}{27}\right)^{1/2} = 8/\sqrt{27} \approx 1.5396$이 되어 앞부분의 결과와 일치한다.
- $(m,n) = (1,3), (2,1), (2,3), (3,5)$에 대하여 $a \in [0,1]$을 촘촘하게 탐색한 결과가 공식과 일치한다. 예를 들어 $(m,n) = (2,1)$이면 $16/5^{5/4} \approx 2.1400$이다. 중심이 원점에서 벗어난 직사각형을 무작위로 잡아 보아도 이 값을 넘지 못한다.
- n을 고정하고 $m \to \infty$이면 $k \to 0$이 되어 곡선이 정사각형 $|x| \le 1, |y| \le 1$을 가득 채우게 되고, 공식의 값은 그 정사각형의 넓이인 4에 수렴한다.

흔한 실수

- 인수 4를 빠뜨리는 실수: 꼭짓점 (a, b)는 가로 길이 $2a$, 세로 길이 $2b$인 직사각형을 준다.
- n이 홀수라는 조건이 왜 중요한지 놓치는 실수: n이 짝수이면 유계인 곡선이 생기지 않는다.

STEP 너머

$a(1-a)^k$의 최댓값 구하기는 사실 가중 산술-기하 평균 부등식(weighted AM–GM) 문제가 모습을 바꾼 것이다. $a \cdot \left(\frac{1-a}{k}\right)^k$를 합이 일정한 $1+k$개 인수의 곱으로 보면 미적분 없이도 최댓값을 얻는다. 곡선 $|x|^p + |y|^q = 1$은 ℓ^p 노름(norm)의 단위 공(unit ball)과 사촌 격인데, 이것은 대학 1학년 해석학과 선형대수학에서 등장한다. 이런 종류의 부등식에 대해 더 알고 싶다면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(수학 고급 문제)를, 최적화의 바탕이 되는 해석학에 대해서는 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학의 이해)를 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.