풀이

STEP I 1989, 문제 6

순수수학 • 법선과 미분방정식

STEP I 1989, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/89-s1-q6

핵심 아이디어

P에서의 법선(normal)의 기울기(gradient)는 $-1/\mathrm{f}'(x)$이므로, Q를 구하려면 법선의 방정식에 $X = 0$을 대입하기만 하면 된다. 그러면 PQ^2은 수평 거리의 제곱과 수직 거리의 제곱의 합이 되고, 주어진 길이 조건은 $\mathrm{f}'(x)$만에 대한 방정식으로 바뀐다. 유일하게 미묘한 부분은 마지막의 제곱근이다. 어떤 부호를 택할지는 최솟점이 결정한다.

풀이

Q의 y좌표

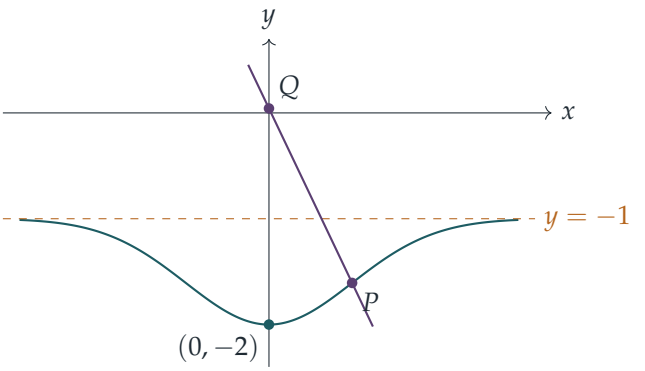
$P = (x, \mathrm{f}(x))$에서 접선(tangent)의 기울기는 $\mathrm{f}'(x)$이므로, ($\mathrm{f}'(x) \neq 0$이라면) 법선의 기울기는 $-1/\mathrm{f}'(x)$이다. 직선 위의 임의의 점의 좌표를 (X, Y)로 나타내면, 법선은

$$Y - \mathrm{f}(x) = -\frac{1}{\mathrm{f}'(x)}\,(X - x).$$

이다. $X = 0$을 대입하면, 법선은 y축과

$$Y = \mathrm{f}(x) + \frac{x}{\mathrm{f}'(x)}, \qquad \text{이므로} \qquad Q = \left(0,\ \mathrm{f}(x) + \frac{x}{\mathrm{f}'(x)}\right).$$

에서 만난다. ($\mathrm{f}'(x) = 0$이면 법선은 수직선이 되고, $x = 0$이 아닌 한 y축과 만나지 않는다.)



미분방정식

P와 Q는 수평 방향으로 x만큼, 수직 방향으로 $x/\mathrm{f}'(x)$만큼 차이가 나므로

$$PQ^2 = x^2 + \frac{x^2}{(\mathrm{f}'(x))^2}.$$

이다. 이것을 $\mathrm{e}^{x^2} + x^2$과 같다고 놓으면 x^2 항이 소거되어

$$\frac{x^2}{(\mathrm{f}'(x))^2} = \mathrm{e}^{x^2}, \qquad \text{즉} \qquad \boxed{(\mathrm{f}'(x))^2 = x^2\,\mathrm{e}^{-x^2}.}$$

을 얻는다. 이는 $\mathrm{f}'(x) = \pm x\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$와 같다.

$(0, -2)$에서 최솟값을 갖는 곡선

> **생각해 보기** 어느 부호를 택해야 할까? 그리고 곡선을 따라가는 도중에 부호가 바뀔 수도 있을까?

f'은 연속(continuous)이고 (곡선이 최솟점을 가지므로 미분가능(differentiable)하다고 가정한다), $\mathrm{f}'(x)^2 = x^2\mathrm{e}^{-x^2}$은 $x = 0$에서만 0이 되므로, f'은 $x > 0$에서도, $x < 0$에서도 부호가 바뀔 수 없다. 부호가 바뀌려면 0을 지나야 하기 때문이다. $(0, -2)$가 최솟점이 되려면 f는 0의 바로 왼쪽에서 감소하고 바로 오른쪽에서 증가해야 하므로, $x < 0$에서 $\mathrm{f}'(x) < 0$이고 $x > 0$에서 $\mathrm{f}'(x) > 0$이다. 이것은 정확히 x의 부호와 같으므로, 양쪽 모두에서

$$\mathrm{f}'(x) = x\,\mathrm{e}^{-x^2/2}.$$

이다. (전체에서 음의 부호를 택하면 $x = 0$에서 최댓값을 갖게 되고, 부호를 섞으면 f'의 부호가 일정해져 변곡점(point of inflection)이 된다.)

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^{-x^2/2}) = -x\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$이므로 적분하면

$$\mathrm{f}(x) = -\mathrm{e}^{-x^2/2} + c.$$

이다. 조건 $\mathrm{f}(0) = -2$에서 $-1 + c = -2$이므로 $c = -1$이고, 곡선은

$$\boxed{y = -1 - \mathrm{e}^{-x^2/2}.}$$

이다. 이 곡선은 $x = 0$에서 최솟값 -2를 갖고, 그림에서처럼 양쪽으로 점근선(asymptote) $y = -1$을 향해 올라간다.

검산

- $x = 1$일 때: $\mathrm{f}(1) = -1 - \mathrm{e}^{-1/2} \approx -1.6065$이고 $\mathrm{f}'(1) = \mathrm{e}^{-1/2} \approx 0.6065$이므로, $Q \approx (0,\, 0.0422)$이고 $PQ \approx \sqrt{1 + 1.6487^2} \approx 1.9283$이다. 이는 요구한 대로 $\sqrt{\mathrm{e} + 1}$과 같다.
- 컴퓨터로 무작위로 고른 2000개의 점에서 법선과 y축의 교점으로 Q를 다시 계산해 보았더니, PQ가 $\sqrt{\mathrm{e}^{x^2} + x^2}$과 (상대오차) 10^{-15} 이내로 일치했다.

흔한 실수

- 법선의 기울기 $-1/\mathrm{f}'(x)$ 대신 접선의 기울기 $\mathrm{f}'(x)$를 사용하는 실수. 이렇게 하면 Q가 $\mathrm{f}(x) - x\mathrm{f}'(x)$에 놓이게 된다.
- 왜 음의 부호를 버리는지 설명하지 않고 제곱근을 $\mathrm{f}'(x) = x\mathrm{e}^{-x^2/2}$로 택하는 실수.

STEP 너머

여기서는 곡선 위의 모든 점에 대한 기하학적 조건이 일계 미분방정식(first-order differential equation)이 되었는데, 이 방정식에서는 f'이 제곱된 형태로 나타나므로, 추가 정보로 가지를 골라 주기 전까지는 해가 하나로 정해지지 않는다. 이처럼 y'에 대해 풀려 있지 않은 방정식에서부터 상미분방정식(ODE)의 유일성 정리(uniqueness theorem)를 다룰 때 주의가 필요해지며, 이는 포락선(envelope)과 특이해(singular solution)로 이어진다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 일계 방정식과 그 해의 존재성(existence) 및 유일성 이론을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.