풀이

STEP I 1989, 문제 5

순수수학 • 이항계수 항등식

> **STEP I 1989, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q5

핵심 아이디어

이항전개(binomial expansion)는 x에 대한 항등식(identity)이므로 어떤 수를 대입해도 성립한다. $x = 1$을 택하면 모든 계수(coefficient)를 더하게 되고, $x = -1$을 택하면 부호를 번갈아 가며 더하게 된다. 이 두 결과를 결합하면 짝수 번째 계수와 홀수 번째 계수를 분리할 수 있다. (ii)의 가중합에서 $\binom{n}{r}$ 앞의 인수 r는 바로 x^r를 미분(differentiate)할 때 생기는 것이므로, 전개식을 미분한 다음 대입한다.

풀이

양의 정수 n에 대하여

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n,$$

이다. 여기서 $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$이다. 이 식은 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

소문항 (i)

짝수 번째 계수의 합을 $E = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}$, 홀수 번째 계수의 합을 $O = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n-1}$이라 하자. n이 짝수이므로 마지막 항 $\binom{n}{n}$은 E에, $\binom{n}{n-1}$은 O에 속한다. 따라서 E와 O를 합치면 모든 계수가 정확히 한 번씩 들어 있다.

전개식에 $x = 1$을 대입하면

$$E + O = 2^n.$$

이다. $x = -1$을 대입하면 각 짝수 거듭제곱 $(-1)^r$은 $+1$이고 각 홀수 거듭제곱은 -1이며,

$n \geq 1$이므로 좌변은 $0^n = 0$이다. 따라서

$$E - O = 0.$$

이다. 그러므로 $E = O$이고, 이에 따라 $2E = 2^n$이므로

$$E = O = 2^{n-1},$$

이다. 이것이 구하는 결과이다.

소문항 (ii)

전개식의 양변을 x에 대하여 미분한다. 상수항은 사라지고 x^r는 rx^{r-1}이 된다.

$$n(1+x)^{n-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}x + 3\binom{n}{3}x^2 + \cdots + n\binom{n}{n}x^{n-1}.$$

이제 $x = 1$을 대입하면

$$n2^{n-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n},$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. 이것은 n이 홀수이든 짝수이든 모든 양의 정수 n에 대하여 성립한다.

> **생각해 보기** 미적분을 쓰지 않고 소문항 (ii)를 이해하는 방법이 있을까?

있다. $1 \leq r \leq n$에 대하여 $r\binom{n}{r} = r \cdot \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!} = n \cdot \dfrac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r)!} = n\binom{n-1}{r-1}$이므로, $(1+x)^{n-1}$의 전개식에 $x = 1$을 대입하면 합은 $n\sum_{r=1}^{n}\binom{n-1}{r-1} = n \cdot 2^{n-1}$이다. 말로 풀어 보면, n명 중에서 크기에 상관없이 위원회를 뽑은 다음 그 위원회에서 위원장을 뽑는 것은, 위원장을 먼저 뽑고(n가지) 나머지 $n-1$명의 임의의 부분집합(subset)을 뽑는 것(2^{n-1}가지)과 같다.

마지막 합

합을 둘로 나눈다.

$$\sum_{r=0}^{n}(r + (-1)^r)\binom{n}{r} = \sum_{r=0}^{n} r\binom{n}{r} + \sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}.$$

첫 번째 합의 $r = 0$인 항은 0이므로, 첫 번째 합은 정확히 (ii)의 합, 즉 $n2^{n-1}$이다. 두 번째 합은 $(1+x)^n$의 전개식에 $x = -1$을 대입한 것이므로, 모든 양의 정수 n에 대하여 $(1-1)^n = 0$이다. (이것은 (i)의 $E - O = 0$ 단계이며, n이 짝수일 필요 없이 $n \geq 1$이기만 하면 된다.) 그러므로

$$\boxed{\sum_{r=0}^{n}(r + (-1)^r)\binom{n}{r} = n2^{n-1}.}$$

이다.

검산

- $n = 2$일 때: 계수는 $1, 2, 1$이므로 $E = 1 + 1 = 2 = O$이고 $2^1 = 2$이다. (ii)의 합은 $2 + 2 \cdot 1 = 4 = 2 \cdot 2^1$이다.
- $n = 3$일 때 마지막 합은 $(0+1) \cdot 1 + (1-1) \cdot 3 + (2+1) \cdot 3 + (3-1) \cdot 1 = 1 + 0 + 9 + 2 = 12 = 3 \cdot 2^2$이다.
- 1부터 29까지의 모든 n에 대하여 세 항등식을 정확히 확인하였다. 예를 들어 $n = 6$이면 $192 = 6 \cdot 2^5$이다.

흔한 실수

- $\sum (-1)^r \binom{n}{r} = 0$이 홀수 n에 대해서도 성립한다는 사실을 잊고, 최종 답이 n의 홀짝성(parity)에 따라 달라진다고 생각하는 것. 이 식은 $n = 0$일 때만 성립하지 않으며, 여기서 n은 양수이다.
- (ii)에서 미분하기 전에 $x = 1$을 대입하는 것. 대입은 마지막에 해야 한다. x가 일단 수가 되면 더 이상 미분할 것이 남지 않는다.

STEP 너머

다항식(polynomial)을 계수들의 저장소로 보고, 대입하거나 미분하거나 곱하여 정보를 뽑아내는 것은 **생성함수**(generating function)의 아이디어이며, 이는 조합론(combinatorics)과 확률(probability)에서 가장 강력한 도구 중 하나이다. ± 1 대신 복소수 단위근(roots of unity)을 대입하면 같은 방식으로 세 번째마다 또는 네 번째마다의 계수를 골라낼 수 있다. 또 확률생성함수(probability generating function)를 미분하면 분포(distribution)의 평균(mean)을 얻는데, 이는 여기서 미분으로 $\sum r \binom{n}{r}$을 얻은 것과 똑같다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)에서 생성함수가 활용되는 모습을 볼 수 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.