풀이

STEP I 1989, 문제 4

순수수학 • 램지 이론

> **STEP I 1989, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q4

이 문제는 *Beyond STEP*의 9.2 절 **축소판 램지 정리**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch09/ramsey.html

핵심 아이디어

기하는 잊어도 된다. 점들에 대한 조건은 그중 어느 세 점을 골라도 진짜 삼각형이 된다는 것만 보장하므로, 이 문제는 순전히 여섯 개의 점을 잇는 15개의 변을 색칠(colouring)하는 문제이다. 힌트를 따라 한 점을 살펴보자. 그 점에는 변이 다섯 개 있고 색은 두 가지뿐이므로, 비둘기집 원리(pigeonhole principle)에 의해 그 변들 중 적어도 세 개는 같은 색이다. 그러면 세 개의 반대쪽 끝점들 사이의 변들은 처음 점과 함께 한 가지 색의 삼각형을 완성하거나, 그 자체로 한 가지 색의 삼각형을 이룬다.

풀이

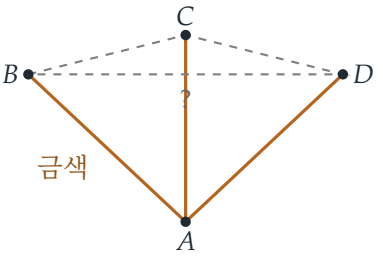
점 여섯 개

어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않으므로(collinear), 어느 세 점을 골라도 진짜 삼각형의 꼭짓점이 되고, 그 세 변은 우리가 그은 선분들 가운데 있다. (어느 네 점도 한 평면 위에 있지 않다(coplanar)는 조건은 논증에 전혀 쓰이지 않는다.)

A에서 나오는 다섯 선분 AB, AC, AD, AE, AF를 생각하자. 각 선분은 금색이거나 은색이다. 금색이 많아야 두 개이고 은색도 많아야 두 개라면 선분은 모두 합쳐 많아야 네 개일 것이므로 모순이다. 따라서 이 중 적어도 세 개는 같은 색이다. 점 $B, \ldots, F$의 이름을 다시 붙이

고, 필요하면 두 색의 이름을 서로 바꾸면, 다음과 같이 가정할 수 있다.

$AB,\ AC,\ AD$는 모두 금색이다.



이제 반대쪽 끝점들을 잇는 세 선분 BC, CD, DB를 살펴보자.

생각해 보기 BC, CD, DB가 어떤 색이든, 아래 두 경우 중 하나에서 반드시 한 가지 색의 삼각형이 생기는 이유는 무엇인가?

가능한 경우는 두 가지뿐이다.

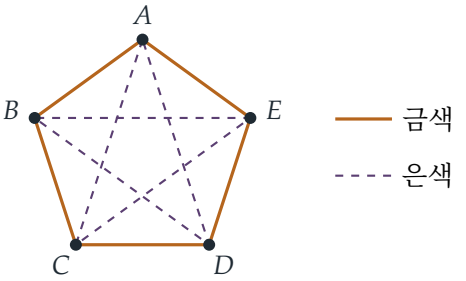
- **BC, CD, DB 중 적어도 하나가 금색인 경우.** 그것이 BC라고 하자(나머지 경우는 문자만 바꾸면 똑같다). 그러면 AB, AC, BC가 모두 금색이므로 삼각형 ABC의 변은 모두 한 가지 색이다.
- **BC, CD, DB 중 어느 것도 금색이 아닌 경우.** 그러면 세 변이 모두 은색이므로 삼각형 BCD의 변은 모두 한 가지 색이다.

어느 경우든 변이 모두 같은 색인 삼각형이 존재하며, 이것이 증명해야 할 내용이었다.

점 다섯 개

점이 다섯 개이면 각 점에 변이 네 개뿐이어서 둘과 둘로 나뉠 수 있으므로 위의 논증은 성립하지 않는다. 이 결과가 실제로 거짓임을 보이려면 한 가지 색의 삼각형이 없는 색칠을 하나 찾으면 된다.

점 A, B, C, D, E를 오각형(pentagon) 둘레에 놓는다. 다섯 변 AB, BC, CD, DE, EA를 금색으로 칠하고, 다섯 대각선(diagonal) AC, BD, CE, DA, EB(오각별(pentagram))를 은색으로 칠한다.



모든 삼각형은 다섯 점 중 세 점을 사용한다. 오각형의 어느 세 꼭짓점을 골라도 그중 적어도 두 개는 서로 이웃하지 않으므로(세 꼭짓점이 서로 모두 이웃하려면 5-순환 안에 삼각형이 있어야 한다), 모든 삼각형에는 은색 변이 있다. 또한 어느 세 꼭짓점을 골라도 그중 적어도 두 개는 서로 **이웃한다**. 세 점 중 어느 두 점도 이웃하지 않는다면, 오각형 둘레를 따라 연이어 고른 꼭짓점들 사이의 각 틈에 고르지 않은 꼭짓점이 적어도 하나씩 있어야 하므로 $3+3=6$개의 점이 필요하기 때문이다. 따라서 모든 삼각형에는 금색 변도 있다. 그러므로 모든 변이 한 가지 색인 삼각형은 없다.

생각해 보기 정오각형은 평평하므로 네 꼭짓점이 한 평면 위에 있다. 이것은 점들이 일반적인 위치에 있어야 한다는 규칙을 어기는 것이 아닌가?

점들이 말 그대로 한 평면 위에 있다면 그렇겠지만, 색칠은 어느 쌍이 연결되어 있는지에만 의존할 뿐 점들이 어디에 있는지와는 무관하다. 꼭짓점들을 평면에서 서로 다른 높이만큼 살짝 들어 올리자(예를 들어 $k=0,1,2,3,4$에 대하여 k번째 꼭짓점을 높이 $0.3k^2$로 올린다). 그러면 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않고 어느 네 점도 한 평면 위에 있지 않으며, 위에서 내려다본 그림은 여전히 여기 그린 오각형과 오각별이고, 색칠도 같으며 한 가지 색의 삼각형도 없다.

검산

점 여섯 개에 대해 변을 색칠하는 방법은 $2^{15}=32768$가지뿐이므로 컴퓨터로 모두 확인해 볼 수 있다. 모든 색칠에 한 가지 색의 삼각형이 있으며, 사실 언제나 적어도 두 개가 있다. 점 다섯 개에 대해서는, 오각형 색칠의 $\binom{5}{3}=10$개 삼각형을 모두 확인하면 각 삼각형에 두 색이 모두 있음을 확인할 수 있다. 행렬식(determinant)으로 확인하면 위에서 들어 올린 오각형에는 한 평면 위에 있는 네 점이 없음을 확인할 수 있다.

흔한 실수

- 무엇을 가정하는지 밝히지 않고 "대칭성에 의해"라고만 말하는 것. A에서 나오는 변들 중 다수인 색의 변 세 개를 고르고 그 색을 금색이라고 부른다는 것을 분명히 밝혀야 한

다.

- A에 한 가지 색의 변이 세 개 있다는 것만 증명하고 거기서 멈추는 것. 두 번째 단계, 즉 BC, CD, DB를 살펴보는 것이 증명의 핵심이다.
- 점 다섯 개의 경우에 모든 삼각형을 확인하지 않고 그림만 제시하는 것. "A에서 나오는 별 모양은 금색, 나머지는 모두 은색"과 같은 색칠은 성립하지 않는다.

STEP 너머

이것은 램지 이론(Ramsey theory)의 첫 번째 사례이다. **램지 수**(Ramsey number) $R(3,3)$은 완전 그래프(complete graph) K_n의 변을 두 가지 색으로 어떻게 칠하든 한 가지 색의 삼각형이 반드시 생기는 가장 작은 n이며, 이 문제는 $R(3,3) = 6$임을 보여 준다. 램지(Ramsey)의 정리는 한 가지 색의 완전 부분그래프의 크기가 얼마이든 그러한 수가 존재한다고 말하지만, 이 수들은 계산하기가 지독하게 어렵다. $R(5,5)$조차 아직 알려져 있지 않다. 램지의 정리를 포함하여 그래프 이론(graph theory)을 훌륭하게 소개하는 책으로 Wilson, *Introduction to Graph Theory*(그래프 이론 입문)가 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.