풀이

STEP I 1989, 문제 3

순수수학 • 벡터와 내적

> **STEP I 1989, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q3

핵심 아이디어

O를 원점(origin)으로 잡고 모든 것을 두 벡터(vector) $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$로 나타낸다. 그러면 "수직(perpendicular)"은 "스칼라곱(scalar product)이 0"이라는 조건이 되고, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = 1$이므로 그 스칼라곱은 x, OY, 그리고 유일한 미지수 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$에만 의존한다. $OX + OY = 1$을 이용하면 x와 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$를 잇는 방정식 하나만 남는다. 그다음 범위는 x가 움직일 수 있는 범위에서 나온다.

풀이

조건

O를 원점으로 잡고 $k = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$라 하자. C는 A에서 B로 가는 길의 3분의 1 지점이고 D는 3분의 2 지점이므로

$$\overrightarrow{OC} = \mathbf{a} + \tfrac{1}{3}(\mathbf{b}-\mathbf{a}) = \tfrac{1}{3}(2\mathbf{a}+\mathbf{b}), \qquad \overrightarrow{OD} = \tfrac{1}{3}(\mathbf{a}+2\mathbf{b}).$$

X는 OA 위에 있고 $OX = x$이며 $|\mathbf{a}| = 1$이므로 $\overrightarrow{OX} = x\mathbf{a}$이다. 마찬가지로 $y = OY = 1 - x$에 대하여 $\overrightarrow{OY} = y\mathbf{b}$이다. 따라서

$$3\overrightarrow{CY} = (3y-1)\mathbf{b} - 2\mathbf{a}, \qquad 3\overrightarrow{DX} = (3x-1)\mathbf{a} - 2\mathbf{b}.$$

두 직선이 수직일 필요충분조건은 스칼라곱이 0인 것이다. 전개하고 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = 1$을 이용하면

$$\begin{aligned} 9\,\overrightarrow{CY}\cdot\overrightarrow{DX} &= (3x-1)(3y-1)k - 2(3y-1) - 2(3x-1) + 4k \\ &= k[(3x-1)(3y-1)+4] - 2(3x+3y-2). \end{aligned}$$

이제 $x+y=1$을 이용한다. 그러면 $3x+3y-2=1$이고

$$(3x-1)(3y-1) = 9xy - 3(x+y) + 1 = 9xy - 2.$$

따라서 수직 조건은 $k(9xy+2)=2$가 된다. $y=1-x$를 대입하면

$$\boxed{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \frac{2}{9x(1-x)+2}}$$

이다(분모는 2 이상이므로 이것으로 나누어도 안전하다).

범위

X는 길이가 1인 선분(segment) OA 위에 있으므로 $0 \le x \le 1$이다. (그러면 $y=1-x$도 $[0,1]$에 속하므로 Y는 자동으로 OB 위에 있다.) 이 구간에서

$$x(1-x) = \tfrac{1}{4} - (x-\tfrac{1}{2})^2,$$

이므로 $0 \le x(1-x) \le \frac{1}{4}$이고, 최댓값은 $x=\frac{1}{2}$에서, 최솟값은 $x=0$ 또는 1에서 얻는다. 따라서

$$2 \le 9x(1-x)+2 \le \tfrac{9}{4}+2 = \tfrac{17}{4}.$$

역수(reciprocal)를 취하면 부등호의 방향이 바뀌고(모든 값이 양수이다), 2를 곱하면

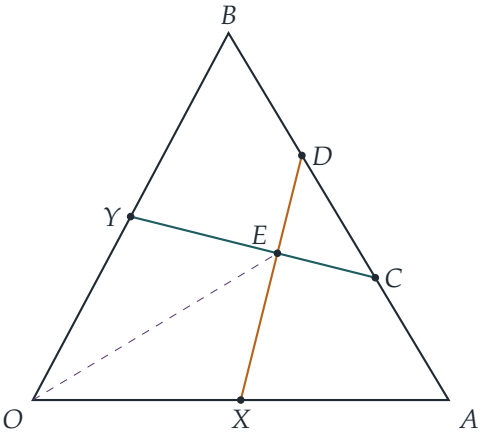
$$\frac{8}{17} \le \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \le 1,$$

이 되어 증명이 끝난다. (값 1이 되려면 $\mathbf{a}=\mathbf{b}$이어야 하는데, 이는 제대로 된 삼각형이 아니므로 실제로는 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}<1$이다. 그래도 주어진 부등식은 여전히 성립한다.)

가장 큰 각과 OE

생각해 보기 왜 가장 큰 각이 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$의 가장 작은 값에 대응하는가?

$|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1$이므로 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \cos A\hat{O}B$이고, 코사인(cosine)은 $[0,\pi]$에서 감소한다. 따라서 각은 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \frac{8}{17}$일 때, 즉 $x=\frac{1}{2}$일 때(따라서 $y=\frac{1}{2}$일 때) 가장 크다. 이때 X와 Y는 각각 OA와 OB의 중점이고, 각의 크기는 $\arccos\frac{8}{17} \approx 61.9°$이다.



이제 전체 도형은 **a**와 **b**를 맞바꾸는 것에 대하여 대칭이다. 이 교환은 $A \leftrightarrow B$, $C \leftrightarrow D$, $X \leftrightarrow Y$를 바꾸므로 직선 CY와 DX를 서로 바꾼다. 따라서 두 직선의 교점 E는 이 교환으로 변하지 않으므로 대칭축(line of symmetry) 위에 있다. 즉 어떤 t에 대하여 $\overrightarrow{OE} = t(\mathbf{a}+\mathbf{b})$이다.

DX 위의 일반적인 점은

$$\overrightarrow{OX} + s\,\overrightarrow{XD} = \tfrac{1}{2}\mathbf{a} + s(\tfrac{1}{3}\mathbf{a} + \tfrac{2}{3}\mathbf{b} - \tfrac{1}{2}\mathbf{a}) = (\tfrac{1}{2} - \tfrac{s}{6})\mathbf{a} + \tfrac{2s}{3}\mathbf{b}.$$

이다. **a**와 **b**는 평행하지 않으므로 계수를 비교할 수 있다. 이것이 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$의 상수배가 되는 것은 $\frac{1}{2} - \frac{s}{6} = \frac{2s}{3}$일 때이고, 이로부터 $s = \frac{3}{5}$, $t = \frac{2}{5}$를 얻는다. 따라서 $\overrightarrow{OE} = \frac{2}{5}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$이다. 마지막으로

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = 2 + \tfrac{16}{17} = \tfrac{50}{17},$$

이므로

$$OE = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{50}{17}} = \frac{2}{5}\cdot\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{17}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{17}} = \boxed{\frac{2\sqrt{34}}{17}} \approx 0.686.$$

검산

- 좌표로 $\mathbf{a} = (1,0)$, $\mathbf{b} = (\frac{8}{17}, \frac{15}{17})$로 잡자. 그러면 $X = (\frac{1}{2}, 0)$, $D = (\frac{11}{17}, \frac{10}{17})$이므로 $\overrightarrow{XD} = (\frac{5}{34}, \frac{10}{17})$이다. 또 $Y = (\frac{4}{17}, \frac{15}{34})$, $C = (\frac{14}{17}, \frac{5}{17})$이므로 $\overrightarrow{CY} = (-\frac{10}{17}, \frac{5}{34})$이다. 두 벡터의 스칼라곱은 $-\frac{50}{578} + \frac{50}{578} = 0$으로, 예상대로이다.
- $E = \frac{2}{5}(\frac{25}{17}, \frac{15}{17}) = (\frac{10}{17}, \frac{6}{17})$이고 $|OE| = \frac{\sqrt{136}}{17} = \frac{2\sqrt{34}}{17} \approx 0.6860$이다. 이는 두 직선의 교점을 직접 수치적으로 구한 값과 일치한다.
- 값 $s = \frac{3}{5}$는 $[0,1]$에 속하므로, E는 실제로 X와 D 사이, 삼각형 내부에 있다.

흔한 실수

- $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=1$임을 잊고 조건식에 $|\mathbf{a}|^2$ 항을 그대로 남겨 두거나, 삼등분점(trisection point)을 반대로 잡는 실수.
- 가장 큰 각이 가장 큰 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$를 뜻한다고 생각하는 실수. 각이 커질수록 코사인은 감소한다.
- $x\mathbf{a}$ 대신 $\overrightarrow{OX}=x$라고 쓰는 실수. 점 X는 벡터이고, x는 그 길이일 뿐이다.

STEP 너머

여기서 쓴 방법, 즉 모든 점을 두 기저 벡터(basis vector)의 일차결합으로 쓰고 기하를 스칼라곱으로 바꾸는 방법은 내적(inner product)과 그람 행렬(Gram matrix)을 다루는 출발점이다. 벡터들의 배치는 스칼라곱의 표에 의해 회전을 제외하고 결정되는데, 여기서 그 표는 단지 $1,\ 1,\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$뿐이다. 그래서 문제 전체가 하나의 수로 귀결된다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)가 이 아이디어들을 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.