풀이

STEP I 1989, 문제 2

순수수학 • 리만 합과 극한

> **STEP I 1989, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q2

핵심 아이디어

이 낯선 식은 사실 직사각형 넓이의 합이 모습을 바꾼 것에 지나지 않는다. n개의 직사각형 넓이의 합을 직접 써 보면 $k\ln k$가 들어간 합이 나오는데, 팩토리얼(factorial)의 로그로 이루어진 부분은 바로 그 합을 다르게 묶은 것일 뿐이다. 두 식이 같다는 것을 확인하고 나면 극한은 적분이 되고, 그 적분은 첫 번째 문항의 결과로 계산할 수 있다.

풀이

부정적분

$u=\ln x$, $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=x$로 놓고 부분적분(integration by parts)을 하면 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}$, $v=\frac{1}{2}x^2$이므로

$$\begin{aligned}\int x\ln x\,\mathrm{d}x &= \tfrac{1}{2}x^2\ln x-\int \tfrac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= \tfrac{1}{2}x^2\ln x-\tfrac{1}{4}x^2+C.\end{aligned}$$

적분값

$\ln(1/x)=-\ln x$이므로 피적분함수(integrand)는 $-x\ln x$이다. 피적분함수가 $x=0$에서 정의되지 않으므로 $[\varepsilon,1]$에서 적분한 다음 $\varepsilon\to 0^+$로 보낸다.

$$\int_\varepsilon^1 x\ln(1/x)\,\mathrm{d}x=\left[\tfrac{1}{4}x^2-\tfrac{1}{2}x^2\ln x\right]_\varepsilon^1=\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4}\varepsilon^2+\tfrac{1}{2}\varepsilon\,(\varepsilon\ln\varepsilon).$$

$\varepsilon\to 0$일 때 $\varepsilon^2\to 0$이고 (문제에서 주어진 사실에 의해) $\varepsilon\ln\varepsilon\to 0$이므로

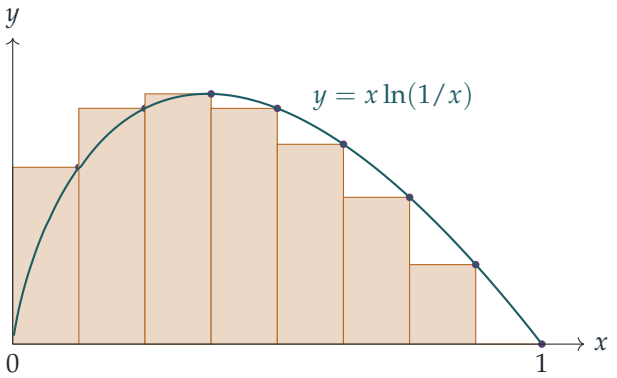
$$\int_0^1 x\ln(1/x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}.$$

같은 사실로부터 $x \to 0^+$일 때 $f(x) = x\ln(1/x)$가 0으로 수렴함을 알 수 있으므로, $f(0) = 0$으로 정하면 f는 $[0,1]$ 전체에서 연속(continuous)이다. 곡선은 0에서 올라가 $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$에서 ($f'(x) = -\ln x - 1 = 0$인 점) 최댓값 $\frac{1}{\mathrm{e}}$에 이르고, $x = 1$에서 다시 0으로 내려온다.

직사각형

$[0,1]$을 폭이 $\frac{1}{n}$인 n개의 띠로 나눈다. k번째 띠는 $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$이고, 이 띠 위의 직사각형은 오른쪽 위 꼭짓점이 곡선 위에 있으므로 높이는

$$f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{k}{n}\ln\frac{n}{k} = \frac{k}{n}(\ln n - \ln k).$$



따라서 직사각형 넓이의 합은

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\cdot\frac{k}{n}(\ln n - \ln k) &= \frac{\ln n}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\ln k \\ &= \frac{\ln n}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\ln k \\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln n - \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\ln k. \end{aligned}$$

첫째 항은 이미 우리가 원하는 식과 일치한다.

? **생각해 보기** 팩토리얼은 어디에서 나오는가?

$0 \le m \le n-1$일 때

$$\ln\frac{n!}{m!} = \ln((m+1)(m+2)\cdots n) = \sum_{k=m+1}^{n} \ln k.$$

이제 이것을 $m = 0, 1, \ldots, n-1$에 대하여 모두 더하고, 각 $\ln k$가 몇 번 나타나는지 세어 보자. 항 $\ln k$는 $m+1 \le k$일 때, 즉 $m = 0, 1, \ldots, k-1$일 때 정확히 포함되므로 k번 나타난다.

따라서

$$\ln\frac{n!}{0!}+\ln\frac{n!}{1!}+\cdots+\ln\frac{n!}{(n-1)!}=\sum_{k=1}^{n}k\ln k.$$

(예를 들어 $n=3$이면 $\ln 6+\ln 6+\ln 3=\ln 1+2\ln 2+3\ln 3$이고, 양변은 모두 $\ln 108$이다.) 그러므로 문제의 식은 정확히 S_n, 즉 n개의 직사각형 넓이의 합이다.

극한

$n\to\infty$일 때 직사각형들은 곡선에 점점 더 가깝게 들어맞고, f가 $[0,1]$에서 연속이므로 넓이의 합은 곡선 아래의 넓이로 수렴한다. 따라서

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln n-\frac{1}{n^2}\left[\ln\frac{n!}{0!}+\ln\frac{n!}{1!}+\cdots+\ln\frac{n!}{(n-1)!}\right]=S_n\to\int_0^1 x\ln(1/x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4},$$

이므로 증명이 끝난다.

"직사각형들이 점점 더 가깝게 들어맞는다"보다 더 확실한 근거를 원한다면, 다음과 같은 부등식으로 오차를 잡을 수 있다. 각 띠에서 직사각형의 넓이와 곡선 아래의 넓이의 차는 많아야 그 띠에서 f가 변하는 양의 $\frac{1}{n}$배이다. 이 변화량을 모든 띠에 대하여 더하면, f는 $\frac{1}{\mathrm{e}}$만큼 올라갔다가 $\frac{1}{\mathrm{e}}$만큼 다시 내려오므로 합은 많아야 $\frac{2}{\mathrm{e}}$이다. 따라서 $|S_n-\frac{1}{4}|\le\frac{2}{\mathrm{e}n}\to 0$이다.

검산

- 첫 번째 문항의 답을 미분해 본다. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2\right)=x\ln x+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x=x\ln x$.
- $n=2$이면 식의 값은 $\frac{3}{4}\ln 2-\frac{1}{4}(\ln 2+\ln 2)=\frac{1}{4}\ln 2\approx 0.173$이고, 이는 두 직사각형의 넓이의 합 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\cdot 0$과 같다.
- 수치로 계산하면 식의 값은 $n=10$일 때 약 0.24559, $n=100$일 때 약 0.249937, $n=1000$일 때 약 0.2499992로, $\frac{1}{4}$에 가까워진다.

흔한 실수

- 부호를 놓치는 실수: 피적분함수는 $x\ln(1/x)=-x\ln x$이므로 첫 번째 문항에서 구한 부정적분의 부호를 바꾸어야 하고, 넓이는 $-\frac{1}{4}$가 아니라 $+\frac{1}{4}$이다.
- $\frac{1}{2}n(n+1)$ 대신 $\sum k=\frac{1}{2}n^2$으로 쓰는 실수: 그러면 괄호 안의 $\frac{1}{n}$이 사라져 버린다.
- 적분이 0에서 이상적분(improper integral)이라는 것을 잊는 실수: 아래끝에서는 문제에서 주어진 사실 $x\ln x\to 0$이 필요하다.

STEP 너머

직사각형 넓이의 합은 리만 합(Riemann sum)이며, 닫힌구간에서 연속인 모든 함수에 대하여 리만 합이 적분으로 수렴한다는 사실은 대학 해석학 강의에서 처음 만나는 중요한 정리 가운데 하나이다. 우리가 f의 전체 오르내림을 이용해 구한 오차의 한계는 **유계변동**(bounded variation) 함수라는 개념의 바탕이 되는 아이디어이다. 거꾸로 보면, 이 문제는 $\sum k \ln k$에 대한 정보도 준다. 이 값은 초계승(hyperfactorial) $1^1 2^2 \cdots n^n$과 밀접하게 관련되어 있으며, 그 증가 속도는 $n!$에 대한 스털링(Stirling) 공식과 같은 방식으로 더 정밀하게 구할 수 있다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 리만 적분을 꼼꼼하게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.