풀이

STEP I 1989, 문제 16

확률과 통계 • 영합 게임

> **STEP I 1989, 16번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q16

이 문제는 *Beyond STEP*의 12.14 절 **혼합 전략**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch12/mixed-strategies.html

핵심 아이디어

모든 것은 작은 표 하나에서 나온다. 두 사람이 추측할 수 있는 아홉 가지 쌍 각각에 대해 B가 따는 금액을 적은 표이다. 이 표를 한 번 적어 두면, 각 기댓값(expected value)은 표의 값들의 가중합(weighted sum)일 뿐이다. 마지막 문항에서는 합을 A의 확률 a_j별로 묶으면 "A가 무엇을 하든"이라는 조건이 세 계수에 대한 조건으로 바뀌고, 이 세 계수를 모두 음이 아니게 만드는 것은 작은 선형 부등식(linear inequality) 연립 문제가 된다.

풀이

A가 i를, B가 j를 추측한 판에서 B가 따는 금액(파운드 단위)을 $w(i,j)$라 하자. 규칙을 읽어 보면 다음과 같다.

- $|i-j| = 2$이면 1을 말한 사람이 3을 말한 사람에게 2파운드를 내므로 $w(1,3) = 2$, $w(3,1) = -2$이다.
- $|i-j| = 1$이면 더 큰 수를 말한 사람이 1파운드를 내므로 $w(2,1) = w(3,2) = 1$, $w(1,2) = w(2,3) = -1$이다.
- $w(i,i) = 0$이다.

	B가 1	B가 2	B가 3
A가 1	0	-1	2
A가 2	1	0	-1
A가 3	-2	1	0

$w(j,i) = -w(i,j)$임에 주목하자. 규칙은 두 사람을 똑같이 대하므로, 추측을 서로 바꾸면 돈을 내는 사람도 바뀐다.

소문항 (i)

A가 항상 N을 말한다면, B는 표의 N번째 행을 보고 그중 가장 큰 값을 항상 고르면 된다.

- $N = 1$: B는 항상 3을 말하고 매 판 £2를 딴다.
- $N = 2$: B는 항상 1을 말하고 매 판 £1를 딴다.
- $N = 3$: B는 항상 2를 말하고 매 판 £1를 딴다.

각 경우 이 선택이 유일한 최선이며, 다른 응수는 모두 아무것도 따지 못하거나 잃는다.

소문항 (ii)

한 판에서 A의 추측과 B의 추측은 독립(independent)이다(A는 스스로 무작위로 정하고, B는 몰래 결정한다). 따라서 A가 i를 말하고 B가 j를 말할 확률은 $\frac{1}{3}b_j$이다. 그러므로 B가 따는 금액의 기댓값은

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(W) &= \sum_{j=1}^{3} b_j \cdot \tfrac{1}{3}\big(w(1,j) + w(2,j) + w(3,j)\big) \\ &= \tfrac{1}{3}\big(b_1(0+1-2) + b_2(-1+0+1) + b_3(2-1+0)\big) \\ &= \tfrac{1}{3}\,(b_3 - b_1). \end{aligned}$$

이다. $b_3 \le 1$이고 $b_1 \ge 0$이므로 이 값은 많아야 $\frac{1}{3}$이고, 등호는 정확히 $b_3 = 1$일 때(이때 $b_1 = b_2 = 0$이 강제된다) 성립한다. 따라서 B는 **항상 3을 추측해야** 하며, 그러면 한 판당 £$\frac{1}{3}$를 딸 것으로 기대된다. 균등하게 무작위로 추측하는 A를 상대로 3이라는 추측은 각각 확률 $\frac{1}{3}$로 £2를 따거나, £1를 잃거나, 비긴다.

소문항 (iii)

A가 확률 a_i로 i를, B가 확률 b_j로 j를 서로 독립적으로 추측하면

$$\mathrm{E}(W) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_i b_j\, w(i,j).$$

이다. 각 a_i에 대한 항을 모으면(표의 한 행씩)

$$\mathrm{E}(W) = \underbrace{(2b_3 - b_2)}_{X}\, a_1 + \underbrace{(b_1 - b_3)}_{Y}\, a_2 + \underbrace{(b_2 - 2b_1)}_{Z}\, a_3.$$

이다. 우리는 $X \geq 0, Y \geq 0, Z \geq 0$, 즉

$$b_2 \leq 2b_3, \qquad b_3 \leq b_1, \qquad 2b_1 \leq b_2.$$

이기를 원한다. 이것들을 이어 붙이면 $b_2 \leq 2b_3 \leq 2b_1 \leq b_2$이므로 모두 등호여야 한다. 즉 $b_3 = b_1$이고 $b_2 = 2b_1$이다. 여기에 $b_1 + b_2 + b_3 = 1$을 함께 쓰면

$$b_1 = \tfrac{1}{4}, \qquad b_2 = \tfrac{1}{2}, \qquad b_3 = \tfrac{1}{4},$$

을 얻고, 이때 $X = Y = Z = 0$이므로 확실히 음이 아니다. 따라서 그러한 선택이 존재한다(사실 이것이 유일하다).

생각해 보기 B가 더 잘해서 X, Y, Z를 모두 양수로 만들 수는 없을까?

없다. 임의의 b_j에 대해

$$b_1 X + b_2 Y + b_3 Z = b_1(2b_3 - b_2) + b_2(b_1 - b_3) + b_3(b_2 - 2b_1) = 0,$$

이며, 이는 B가 자기 자신의 복제와 겨루면 본전이라는 사실(표가 반대칭(antisymmetric)이라는 것)을 말할 뿐이다. 합이 1인 음이 아닌 가중치로 X, Y, Z를 가중합했을 때, 셋이 모두 양수라면 그 합은 0이 될 수 없다. 그래서 위의 부등식들은 등호로만 만족될 수 있었던 것이다.

이제 결론을 이끌어 내자. $b = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$이면

$$\mathrm{E}(W) = 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 = 0$$

이 a_1, a_2, a_3의 **모든** 선택에 대해 성립한다. 더 일반적으로, $X, Y, Z \geq 0$이기만 하면 각 $a_i \geq 0$이므로 $\mathrm{E}(W) = Xa_1 + Ya_2 + Za_3 \geq 0$이다. 서로 다른 판에서 B가 따는 금액은 독립이고 동일한 분포를 따르며(independent and identically distributed, 두 사람의 추측이 판마다 독립이므로), 각각의 평균은 0 이상이다. 큰 수의 법칙(law of large numbers)에 의해 여러 판에 걸친 B의 한 판당 평균 상금은 이 평균으로 수렴하므로, A가 무엇을 하든 장기적으로 B는 돈을 잃지 않는다. □

검산

- 소문항 (ii)는 소문항 (iii)에서 $a_1 = a_2 = a_3 = \frac{1}{3}$인 특수한 경우이다. 실제로 $\frac{1}{3}(X + Y + Z) = \frac{1}{3}(b_3 - b_1)$로, 앞에서 구한 것과 같다.

- 소문항 (i)은 a가 모든 가중치를 N에 두는 경우이다. $N = 1$이면 $\mathrm{E}(W) = X = 2b_3 - b_2$이고, 이는 $b_3 = 1$일 때 최대가 되어 2를 준다.
- B가 $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$를, A가 $(0.6, 0.1, 0.3)$을 쓰는 2×10^5판의 시뮬레이션에서 한 판당 평균 상금은 약 -0.004로, 0과 들어맞았다.

흔한 실수

- 부호 규칙을 거꾸로 잡는 것: 차이가 1일 때는 **더 큰** 추측을 한 사람이 내지만, 차이가 2일 때는 **더 작은** 추측을 한 사람이 낸다. 표를 먼저 만들고 반대칭인지 확인하라.
- 소문항 (ii)로부터 B가 추측을 섞어야 한다고 결론 내리는 것: 고정된 혼합 전략(mixed strategy)에 대한 최선의 응수는 언제나 순수 전략(pure strategy)이다(여기서는 항상 3). 섞는 것이 이득이 되는 것은 소문항 (iii)처럼 B가 A의 **모든** 전략에 대비해야 할 때뿐이다.

STEP 너머

이것은 2인 영합 게임(two-player zero-sum game)이며, 소문항 (iii)은 폰 노이만(von Neumann)의 최소최대 정리(minimax theorem)의 작은 사례이다. B에게는 A가 무엇을 하든 적어도 게임의 값만큼은 보장해 주는 혼합 전략이 있고, 게임이 대칭이므로 그 값은 0이다. 그러한 전략을 찾는 것은 선형 계획법(linear programming) 문제이며, 이는 확률을 최적화 및 경제학과 연결해 준다. 확률 쪽으로는 Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*(확률론 입문서)을 보라. 게임 자체에 대해서는 Binmore, *Playing for Real*(게임이론 입문서)이 처음 읽기에 좋다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.