풀이

# STEP I 1989, 문제 13

역학 • 마찰이 있는 사다리의 평형

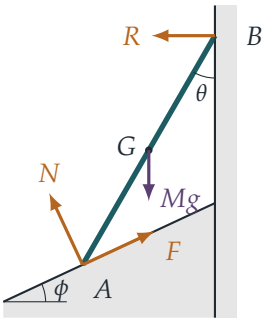
> **STEP I 1989, 13번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q13

## 핵심 아이디어

이 문제는 세 힘에 마찰력이 더해진 평형(equilibrium) 문제이며, 요령은 좋은 방향을 고르는 데 있다. 사다리의 아래 끝에 대한 모멘트(moment)를 취하면 $N$과 $F$가 모두 사라지므로 벽의 반력(reaction)이 곧바로 구해진다. 그다음에는 수평 방향과 수직 방향으로 분해(resolve)하는 대신 **경사면에 수직인 방향과 경사면을 따르는 방향**으로 분해한다. 각 식에는 미지수 $N$과 $F$ 중 하나만 들어 있으므로, 주어진 공식이 바로 나온다.

## 풀이

사다리를 길이가 $2a$인 균일한 막대 $AB$로 모형화하고, 질량중심(centre of mass) $G$는 중점에 있다고 하자. 아래 끝 $A$는 거친 경사면 위에 있고 위 끝 $B$는 매끄러운 벽에 기대어 있으므로, 벽의 반력 $R$는 벽에서 멀어지는 방향을 향하는 수평 방향의 힘이다. $A$에는 경사면에 수직인 수직항력(normal reaction) $N$과 경사면을 따르는 마찰력(friction) $F$가 작용한다. 사다리가 미끄러진다면 아래 끝이 경사면을 따라 아래로, 즉 벽에서 멀어지는 쪽으로 미끄러질 것이므로, $F$는 경사면을 따라 위쪽, 즉 벽을 향하는 방향으로 작용한다고 둔다. ($F$에 대한 공식이 양수로 나오므로 이 선택이 옳음이 확인된다.)




### 벽의 반력

$A$에 대한 모멘트를 취하면 $N$과 $F$가 사라진다. 사다리는 연직선과 각 $\theta$를 이루므로, $B$는 $A$보다 $2a\cos\theta$만큼 높은 곳에 있고 $G$는 $A$로부터 수평 거리 $a\sin\theta$만큼 떨어져 있다. $B$에 작용하는 수평 방향의 힘 $R$의 모멘트는 $R\cdot 2a\cos\theta$이고, 무게의 모멘트는 반대 방향으로 $Mg\cdot a\sin\theta$이므로

$$2aR\cos\theta = Mga\sin\theta \qquad \Longrightarrow \qquad R = \tfrac{1}{2}Mg\tan\theta.$$

### 경사면에 수직인 방향과 경사면을 따르는 방향으로 분해하기

**생각해 보기** 각 식에 미지수가 하나만 들어가게 하려면 어느 방향으로 분해해야 할까?

경사면에 수직인 방향과 경사면을 따르는 방향으로 분해한다. $F$는 경사면에 수직인 성분이 없고, $N$은 경사면을 따르는 성분이 없다. 나머지 두 힘의 성분을 구하면 된다.

- 무게 $Mg$는 경사면 안쪽으로 향하는 성분 $Mg\cos\phi$와 경사면을 따라 아래로 향하는 성분 $Mg\sin\phi$를 가진다.
- 경사면은 벽 쪽으로 올라가므로 위쪽 법선은 벽에서 멀어지는 쪽으로 기울어 있고, (역시 벽에서 멀어지는 쪽을 향하는) 수평 방향의 힘 $R$는 그 법선 방향으로 성분 $R\sin\phi$를 가진다. 즉 경사면 **바깥쪽**으로 향한다. 경사면을 따르는 방향으로는 $R$가 벽에서 멀어지는 쪽, 즉 내리막 방향을 향하며 그 성분은 $R\cos\phi$이다.

경사면에 수직인 방향:

$$N + R\sin\phi = Mg\cos\phi,$$

$$\text{따라서} \quad N = Mg\cos\phi - \tfrac{1}{2}Mg\tan\theta\sin\phi = Mg\left(\cos\phi - \frac{\tan\theta\sin\phi}{2}\right).$$

경사면을 따르는 방향(경사면 위쪽을 양의 방향으로):

$$F = Mg\sin\phi + R\cos\phi \quad \Longrightarrow \quad F = Mg\left(\sin\phi + \frac{\tan\theta\cos\phi}{2}\right).$$

이것이 구하려던 두 결과이다.

### 가장 큰 각

아래 끝이 미끄러지지 않으려면 접촉이 유지되어야 하므로 $N > 0$이어야 하고, 마찰력은 한계를 넘지 않아야 하므로 $\mu = 2$일 때 $F \le \mu N$이어야 한다. (여기서 $F > 0$이므로 마찰에 관한 조건은 이것뿐이다.) $\phi = 45^\circ$이면 $\sin\phi = \cos\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}$이고, $t = \tan\theta$로 두면

$$F = \frac{Mg}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{t}{2}\right), \qquad N = \frac{Mg}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{t}{2}\right).$$

따라서 $N > 0$이려면 $t < 2$이어야 하고, 이때 $F \le 2N$은 다음과 같이 된다.

$$1 + \frac{t}{2} \le 2 - t \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{3t}{2} \le 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \tan\theta \le \frac{2}{3}.$$

이 조건은 $t < 2$보다 엄격하므로 실제로 제약이 되는 조건은 이것이다. $0 < \theta < 90^\circ$에서 $\tan\theta$는 증가하므로, 사다리가 평형 상태로 놓일 수 있는 가장 큰 각은

$$\theta = \arctan\tfrac{2}{3} \approx 33.7^\circ,$$

이고, 이 각에서 마찰은 한계 마찰(limiting friction) 상태이다.

## 검산

- $\phi = 0$(평평한 지면)이면 공식은 $N = Mg$와 $F = \frac{1}{2}Mg\tan\theta = R$를 주는데, 이는 수평인 바닥에 놓인 사다리에 대해 익숙한 결과이다.
- $\theta = 0$(사다리가 연직)이면 벽은 아무 역할도 하지 않고, $N = Mg\cos\phi$, $F = Mg\sin\phi$가 되어 경사면 위에 정지해 있는 입자의 경우와 똑같다.
- 임의의 $\theta$와 $\phi$에 대해 수평 방향과 수직 방향의 힘의 식을 직접 수치적으로 풀어 보면 두 공식과 $10^{-13}$ 이내로 일치하며, $\phi = 45^\circ$일 때 비 $F/N$은 $\theta = 33.690^\circ$에서 2를 지난다.

## 흔한 실수

- $R\sin\phi$ 항의 부호를 잘못 잡는 것. 경사면이 벽 쪽으로 올라가므로 $R$는 아래 끝을 경사면에서 부분적으로 떼어 내는 쪽으로 당기고, 그 결과 $N$이 줄어든다.
- 수평 방향과 수직 방향으로 분해한 다음, 그 결과로 나온 연립방정식을 풀다가 실수하는 것. 그 방법도 통하지만, 경사면을 따르는 방향과 경사면에 수직인 방향으로 분해하는 편이 훨씬 빠르다.

## STEP 너머

경사면이 가파를수록 사다리를 기울일 수 있는 정도가 작아진다는 점에 주목하자. 벽의 반력이 $N$은 줄이고 $F$는 늘리기 때문이다. 이런 문제는 정역학(statics)의 출발점으로, 정역학에서는 미지수들을 서로 분리하도록 축과 모멘트의 기준점을 고른다. 같은 아이디어가 트러스(truss)와 골조 구조의 해석, 그리고 더 일반적으로는 안정성(stability)의 해석에 깔려 있다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 강체(rigid body)의 평형과 마찰을 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.