풀이

STEP I 1989, 문제 12

역학 • 탄성 끈과 에너지

> **STEP I 1989, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q12

핵심 아이디어

모든 것은 정사면체(regular tetrahedron)의 기하에 달려 있다. 즉 질량중심(centre of mass)이 꼭짓점(vertex)에서, 면(face)에서, 그리고 한 꼭짓점을 지나는 축(axis)에서 얼마나 떨어져 있는지가 핵심이다. 이 세 길이를 구하고 나면 첫 번째 부분은 훅의 법칙(Hooke's law)을 적용하기만 하면 된다. 두 번째 부분에서는 대칭(symmetry) 때문에 운동이 순수한 연직 병진운동(translation)으로 유지된다. 정사면체는 정지 상태에서 출발하여 정지 상태로 끝나므로 운동 방정식(equation of motion)은 전혀 필요하지 않다. 중력 퍼텐셜 에너지(gravitational potential energy)와 탄성 퍼텐셜 에너지(elastic potential energy) 사이의 에너지 균형만으로 충분하다.

풀이

정사면체의 기하

막대는 균일한 강체 막대로, 줄은 훅의 법칙을 따르는 가벼운 탄성 줄로 모형화한다. 각 막대의 질량은 그 중점에 있다고 볼 수 있다. 모든 꼭짓점은 여섯 개의 막대 가운데 정확히 세 개에 속하므로, 여섯 중점의 평균은 네 꼭짓점의 평균과 같다. 따라서 질량중심 G는 정사면체의 무게중심(centroid)이다.

면 BCD는 한 변의 길이가 $2a$인 정삼각형이므로, 그 중심 N은 B, C, D 각각으로부터 거리

$$\rho = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

만큼 떨어져 있다. 정사면체의 높이는 $AN = \sqrt{(2a)^2 - \rho^2} = \sqrt{\frac{8}{3}}\,a = \frac{2\sqrt{6}}{3}a$이다. 무게중심

은 AN 위에 있으며, 면에서부터 높이의 4분의 1 되는 곳에 있다. 따라서

$$GN = r = \frac{\sqrt{6}}{6}a, \qquad GA = GB = GC = GD = R = \frac{\sqrt{6}}{2}a.$$

(검산하면 $R^2 = \rho^2 + r^2 = \frac{4}{3}a^2 + \frac{1}{6}a^2 = \frac{3}{2}a^2$이다.)

장력

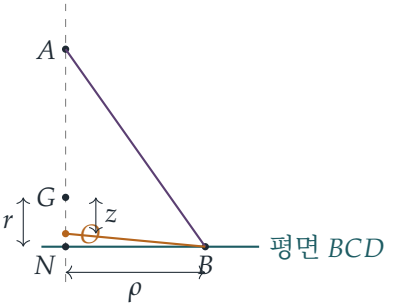
X가 G에 있을 때 각 줄의 길이는 $R = \frac{\sqrt{6}}{2}a$이고 늘어난 길이(extension)는 $R - a = \frac{\sqrt{6}-2}{2}a > 0$이므로 네 줄 모두 팽팽하다. 훅의 법칙에 따라 각 장력(tension)은

$$T = \frac{\lambda(R-a)}{a} = \frac{\sqrt{6}-2}{2}\lambda \approx 0.225\,\lambda.$$

XA가 끊어진 뒤

끊어지기 전에는 크기가 같은 네 장력이 각 꼭짓점을 G를 향하는 네 방향으로 당긴다. G가 무게중심이므로 G에서 각 꼭짓점으로 향하는 단위벡터의 합은 영이다. 따라서 줄들이 작용하는 알짜힘은 없고, 탁자가 무게 Mg 전체를 떠받친다.

XA가 끊어지면 남은 세 줄이 당기는 힘의 합력은 연직 위쪽으로 크기 T이며, 이는 사라진 XA의 당기는 힘에 음의 부호를 붙인 것이다. 수평 방향으로는 연직선 AN에 대한 3회 대칭 때문에 세 힘이 상쇄된다. 각 힘은 이 직선을 지나는 연직 평면 안에 있으므로 비트는 짝힘(couple)을 만들지 않으며, 기울이는 짝힘들은 대칭에 의해 상쇄된다. 따라서 정사면체는 AN이 O를 지나는 연직선 위에 머문 채 순수한 연직 병진운동을 한다. 정사면체가 탁자에서 떠오르는 것은 $T > Mg$이기 때문이며, 이는 마지막에 확인한다.



O에 대한 G의 높이를 z라 하자. 그러면 B는 O를 지나는 연직선으로부터 수평 거리 ρ만큼 떨어져 있고, O에 대한 높이는 $z - r$이다. 따라서 세 줄 각각의 길이는

$$L(z) = \sqrt{\rho^2 + (z-r)^2}.$$

처음에는 $z = 0$이고 $L = \sqrt{\rho^2 + r^2} = R$이다. 가장 높은 지점에서는 BCD가 O와 같은 높이

에 있으므로 $z = r$이고 $L = \rho = \frac{2}{\sqrt{3}}a$이다. $0 \le z \le r$에서 L은 ρ와 R 사이에 있고 둘 다 a보다 크므로, 줄들은 내내 팽팽하게 유지된다.

> **생각해 보기** 다루기 힘든 비선형 운동 방정식을 풀지 않고 최대 높이를 어떻게 구할 수 있을까?

탁자는 매끄럽고 줄은 가벼우므로 역학적 에너지가 보존된다. 정사면체가 곧바로 탁자를 떠나므로 수직항력(normal reaction)은 일을 하지 않는다. 정사면체는 처음과 가장 높은 지점에서 모두 정지해 있으므로 운동 에너지(kinetic energy)는 고려할 필요가 없다. 세 줄이 잃은 탄성 에너지 $3 \cdot \dfrac{\lambda(L-a)^2}{2a}$는 얻은 중력 에너지 Mgr와 같아야 한다.

$$Mg\,r = \frac{3\lambda}{2a}\Big[(R-a)^2 - (\rho - a)^2\Big].$$

괄호 안을 인수분해하고 $R^2 - \rho^2 = \frac{3}{2}a^2 - \frac{4}{3}a^2 = \frac{1}{6}a^2$을 이용하면

$$\begin{aligned}(R-a)^2 - (\rho-a)^2 &= R^2 - \rho^2 - 2a(R-\rho)\\ &= a^2\Big(\tfrac{1}{6} - \sqrt{6} + \tfrac{4}{\sqrt{3}}\Big).\end{aligned}$$

$\dfrac{3}{2ar} = \dfrac{3}{2a}\cdot\dfrac{6}{\sqrt{6}\,a} = \dfrac{3\sqrt{6}}{2a^2}$이므로

$$\begin{aligned}\frac{Mg}{\lambda} &= \frac{3\sqrt{6}}{2}\Big(\tfrac{1}{6} - \sqrt{6} + \tfrac{4}{\sqrt{3}}\Big) = \frac{\sqrt{6}}{4} - 9 + 6\sqrt{2}\\ &\approx 0.6124 - 9 + 8.4853 = 0.0977,\end{aligned}$$

이고, 이는 유효숫자(significant figures) 2자리로 0.098이므로 요구된 결과이다.

끝으로 $Mg \approx 0.098\lambda < 0.225\lambda \approx T$이므로, 끊어진 직후의 위쪽 알짜힘 $T - Mg$는 양수이고 정사면체는 실제로 떠오른다. 이는 문제의 상황과 일치한다.

검산

- $a = 1$로 두고 네 꼭짓점을 좌표로 놓아, 여섯 모서리의 길이가 모두 2이고 네 꼭짓점이 모두 무게중심으로부터 $\frac{\sqrt{6}}{2} \approx 1.2247$만큼 떨어져 있음을 확인했으며, $T \approx 0.2247\lambda$를 다시 얻었다.
- $Mg/\lambda = 6\sqrt{2} + \frac{\sqrt{6}}{4} - 9 \approx 0.09765$로 두고, 운동 방정식 $M\ddot{z} = 3T(L)\,\frac{r-z}{L} - Mg$를 $z = 0$에서의 정지 상태부터 수치적으로 단계별 계산했다. 속도는 $z \approx 0.40825$에서 처음으로 다시 영이 되며, 이는 $r = \frac{\sqrt{6}}{6}$과 일치한다.

흔한 실수

- R을 무게중심에서 면까지의 거리로 잡는 실수. 무게중심은 꼭짓점에서부터 아래로 $\frac{3}{4}$ 되는 곳에 있으므로 $R = 3r$이다.
- 가장 높은 지점에서도 줄이 여전히 늘어나 있다는 사실을 잊는 실수. 그곳에서 각 줄의 에너지는 영이 아니라 $\frac{\lambda(\rho-a)^2}{2a}$이다.
- 늘어난 길이 $L - a$에서 L을 O에서 꼭짓점까지가 아니라 O에서 면의 중심 N까지 잰 길이로 쓰는 실수.

STEP 너머

여기서 쓴 무게중심 요령(여섯 막대 중점의 평균이 네 꼭짓점의 평균과 같다는 것)은, 계의 질량중심이 각 부분의 질량중심을 질량으로 가중평균한 것이라는 일반적 사실의 작은 예이다. 운동을 순수한 병진운동으로 다루는 것은 대칭 논증에 기댄 것인데, 이러한 논증은 강체 동역학(rigid-body dynamics)에서 체계화된다. 강체 동역학에서는 물체의 운동이 질량중심의 병진운동과 질량중심에 대한 회전으로 나뉜다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이 두 아이디어를 꼼꼼하게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.