풀이

STEP I 1989, 문제 11

역학 • 포물체 도달 거리의 최적화

> **STEP I 1989, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q11

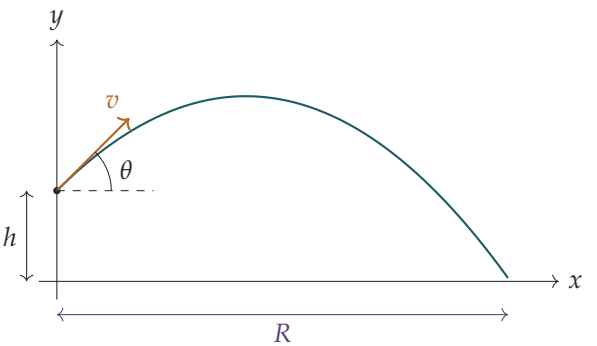
핵심 아이디어

비행 시간(time of flight)은 t에 대한 이차방정식(quadratic)에서 나온다. 포환은 높이가 다시 영이 될 때 땅에 떨어진다. 양의 근을 택해 수평 속력을 곱하면 R을 얻고, 나머지는 제곱근을 요구된 꼴로 정리하는 일뿐이다. 둘째 부분에서 "θ를 조금 줄이면 R이 늘어나는가?"라는 물음은 $\theta = 45°$에서 $\mathrm{d}R/\mathrm{d}\theta$의 부호에 관한 물음이며, $\sin 45° = \cos 45°$라는 대칭성 덕분에 이 도함수(derivative)는 아주 깔끔하게 정리된다.

풀이

모형

포환을 중력만 받으며 움직이는 질점(particle)으로 보고, 점 $(0, h)$에서 속력 v로 수평면 위각 θ 방향으로 던진다고 하자. 여기서 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이고 $h > 0$이다. x축은 던지는 방향의 수평 방향으로, y축은 지면에서 연직 위쪽으로 잡는다.



사거리

시간 t가 지난 뒤

$$x = vt\cos\theta, \qquad y = h + vt\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

포환은 $y = 0$일 때, 곧

$$\tfrac{1}{2}gt^2 - (v\sin\theta)\,t - h = 0 \quad\Longrightarrow\quad t = \frac{v\sin\theta \pm \sqrt{v^2\sin^2\theta + 2gh}}{g}.$$

일 때 땅에 닿는다. $h > 0$이므로 두 근의 곱 $-2h/g$는 음수이고, 따라서 양의 근은 정확히 하나이다. 빼기 부호를 택하면 음의 근(던지기 전의 시각)이 나오므로 더하기 부호를 택한다. 그러면

$$\begin{aligned} R = v\cos\theta\, t &= \frac{v\cos\theta}{g}\left(v\sin\theta + \sqrt{v^2\sin^2\theta + 2gh}\right) \\ &= \frac{v^2\sin\theta\cos\theta}{g}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{v^2\sin^2\theta}}\right) \qquad (v\sin\theta > 0\text{을 밖으로 묶어 냄}) \\ &= \frac{v^2}{2g}\sin 2\theta\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2hg}{v^2\sin^2\theta}}\right), \end{aligned}$$

이고, 여기서 $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$를 이용했다. 이것이 구하는 결과이다.

? **생각해 보기** $v\sin\theta$를 제곱근 안으로 $v^2\sin^2\theta$로 넣어도 되는 이유는 무엇인가?

$\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$는 $a \geq 0$일 때만 성립하기 때문이다. 여기서는 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이므로 $v\sin\theta > 0$이고, 따라서 이 단계는 타당하다. (아래쪽으로 던지는 경우에는 이 단계가 성립하지 않으며, 주어진 공식도 틀리게 된다.)

$45°$가 가장 좋은 각인가?

미분할 때는 정리하기 전의 꼴이 더 다루기 쉽다.

$$R(\theta) = \frac{v}{g}\cos\theta\,(v\sin\theta + S), \qquad S = \sqrt{v^2\sin^2\theta + 2gh},$$

로 쓰면 $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\theta} = \dfrac{v^2\sin\theta\cos\theta}{S}$이다. 곱의 미분법(product rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\theta} = \frac{v}{g}\left[-\sin\theta\,(v\sin\theta + S) + \cos\theta\left(v\cos\theta + \frac{v^2\sin\theta\cos\theta}{S}\right)\right].$$

$\theta = 45°$에서 $\sin\theta = \cos\theta = c = \frac{1}{\sqrt{2}}$로 두자. 항 $-vc^2$와 $+vc^2$가 서로 지워지고

$$\left.\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=45°} = \frac{vc}{g}\left(-S + \frac{v^2c^2}{S}\right) = \frac{vc}{gS}\left(v^2c^2 - S^2\right)$$
$$= \frac{vc}{gS}\left(\tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{2}v^2 - 2gh\right) = -\frac{2vhc}{S} = -\frac{\sqrt{2}\,vh}{\sqrt{v^2+4gh}},$$

이 남는다. 마지막 단계에서는 $S = \sqrt{\frac{1}{2}v^2 + 2gh} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{v^2+4gh}$를 썼다.

$v > 0$이고 $h > 0$이므로 이 도함수는 순음수이다. 따라서 R은 $45°$ 근처에서 θ에 대한 순감소함수이고, 충분히 작은 감소량 $\delta\theta > 0$에 대하여 $R(45° - \delta\theta) \approx R(45°) + \frac{\sqrt{2}\,vh}{\sqrt{v^2+4gh}}\,\delta\theta > R(45°)$이다. **그렇다. θ를 조금 줄이면 R이 늘어난다.**

물리적으로 보면, 높은 곳에서 던진 포환은 평지에서보다 공중에 조금 더 오래 머무르며, 그 늘어난 시간은 수평으로 나아가는 데 쓰는 편이 낫다. 그래서 조금 더 낮게 던지는 것이 유리하다. $h = 0$일 때에만 도함수가 영이 되어 $45°$가 최적이 된다.

검산

- $h = 0$이면 공식은 $R = \frac{v^2}{g}\sin 2\theta$, 곧 익숙한 평지에서의 사거리가 되고, $45°$에서의 도함수는 마땅히 그래야 하듯 0이다.
- 단위: v^2/g는 길이이고, $2hg/v^2$는 무차원(dimensionless)이다.
- 수치로 $g = 9.8$, $v = 13\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $h = 2\,\mathrm{m}$로 두면 $R(45°) \approx 19.05\,\mathrm{m}$이지만 $R(40°) \approx 19.10\,\mathrm{m}$이다. 운동을 시간에 따라 단계적으로 계산해 보면 R에 대한 공식이 재현되고, $45°$에서의 유한 차분(finite-difference) 도함수는 무작위로 고른 여러 v와 h에 대해 $-\sqrt{2}\,vh/\sqrt{v^2+4gh}$와 일치한다.

흔한 실수

- t에 대한 이차방정식에서 엉뚱한 근을 택하거나, 음의 근을 버리는 근거를 밝히지 않는 것.
- "$\sin 2\theta$가 $45°$에서 최대이므로 R도 그렇다"고 추론하는 것. 괄호 부분도 θ에 의존하므로(그것도 θ가 커질수록 줄어든다) 이 논증은 불완전하다.

STEP 너머

일반적으로 $\mathrm{d}R/\mathrm{d}\theta = 0$으로 놓으면, 높이 h에서 던질 때 최적의 발사각은 $\tan\theta = v/\sqrt{v^2+2gh}$를 만족함을 알 수 있다. 이 각은 $45°$보다 조금 작다(위의 수치에서는 약

42°). 실제 포환던지기 선수들은 이보다도 낮게 던지는데, 낮은 각도에서 더 세게 밀어낼 수 있기 때문이다. 이처럼 궤적들의 족(family)에 대해 최적화를 하다 보면 그 족의 **포락선**(envelope), 곧 포환이 도달할 수 있는 모든 점의 경계를 나타내는 "안전 포물선(parabola of safety)"에 이르게 된다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 포물선 운동과 그 여러 변형을 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.