풀이

STEP I 1989, 문제 10

역학 • 속도에 따라 달라지는 저항

> **STEP I 1989, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q10

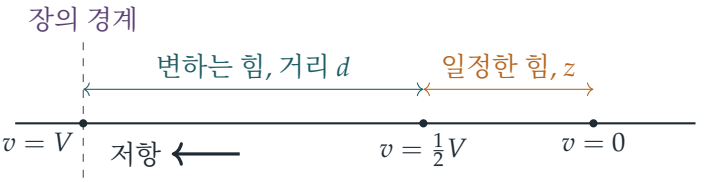
핵심 아이디어

저항(resistance)은 시간이 아니라 속력 v에 따라 달라지고, 우리가 구하려는 것은 거리이다. 이것은 가속도를 $v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$로 쓰라는 신호이다. 이렇게 하면 뉴턴(Newton)의 운동 제2법칙(Newton's second law)이 v와 x를 직접 잇는 변수분리형 미분방정식(separable equation)이 된다. 두 번째 부분은 감속도(deceleration)가 일정한 문제이므로, 전환되는 순간의 힘을 구하고 그 힘을 $\pm 10\%$만큼 변화시키기만 하면 된다.

풀이

모형

우주선을 질량이 M이고 직선 위를 움직이는 입자(particle)로 다룬다. 장(field)에 들어선 뒤 이동한 거리를 x, 속력을 v라 하고, $x = 0$일 때 $v = V$라 하자. 작용하는 힘은 뒤쪽으로 작용하는 저항뿐이므로, 속력은 운동하는 내내 감소한다.



속력이 절반이 될 때까지의 거리

운동 방향을 양의 방향으로 잡고 가속도를 $v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$로 쓰면, 뉴턴의 운동 제2법칙에서

$$Mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{M\omega\,(v^2+V^2)}{v} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{v^2}{v^2+V^2}\,\mathrm{d}v = -\omega\,\mathrm{d}x.$$

를 얻는다.

> **생각해 보기** $\dfrac{v^2}{v^2+V^2}$는 어떻게 적분할까?

분자를 $(v^2+V^2)-V^2$로 쓰면

$$\frac{v^2}{v^2+V^2} = 1 - \frac{V^2}{v^2+V^2}, \qquad \int \frac{v^2}{v^2+V^2}\,\mathrm{d}v = v - V\arctan\frac{v}{V} + C,$$

이다. 여기서 기본 적분 $\int \frac{\mathrm{d}v}{v^2+V^2} = \frac{1}{V}\arctan\frac{v}{V}$를 이용하였다.

속력이 $\frac{1}{2}V$로 떨어졌을 때까지 이동한 거리를 d라 하자. $(x,v)=(0,V)$에서 $(d,\frac{1}{2}V)$까지 적분하면

$$\begin{aligned}\omega d &= \int_{V/2}^{V} \frac{v^2}{v^2+V^2}\,\mathrm{d}v = \Big[v - V\arctan\frac{v}{V}\Big]_{V/2}^{V} \\ &= \frac{V}{2} - V\Big(\arctan 1 - \arctan\tfrac{1}{2}\Big) = V\Big(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \arctan\frac{1}{2}\Big).\end{aligned}$$

이다. 따라서 구하는 거리는

$$d = \frac{V}{\omega}\Big(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \arctan\frac{1}{2}\Big) = \frac{V}{\omega}\Big(\frac{1}{2} - \arctan\frac{1}{3}\Big) \approx 0.178\,\frac{V}{\omega}.$$

이다. 두 번째 꼴은 탄젠트의 뺄셈 공식(tangent subtraction formula)에서 얻은 $\arctan 1 - \arctan\frac{1}{2} = \arctan\dfrac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \arctan\frac{1}{3}$을 이용한 것이다(두 각이 모두 $(0,\frac{\pi}{2})$에 있으므로 모호함이 없다). 어느 꼴로 답해도 완전한 답이다.

일정한 힘

전환 직전에 $v=\frac{1}{2}V$이므로, 저항력의 크기는

$$\frac{M\omega(\frac{1}{4}V^2+V^2)}{\frac{1}{2}V} = \frac{5}{2}M\omega V.$$

이다. 새로운 일정한 힘 F는 이 값과 10% 이내로 차이 나므로

$$\frac{9}{10}\cdot\frac{5}{2}M\omega V \le F \le \frac{11}{10}\cdot\frac{5}{2}M\omega V, \qquad \text{즉} \qquad \frac{9}{4}M\omega V \le F \le \frac{11}{4}M\omega V.$$

이다. 힘이 일정하면 감속도 $a = F/M$도 일정하므로, $u = \frac{1}{2}V$이고 나중 속력이 0일 때 $v^2 = u^2 - 2as$에서

$$z = \frac{(V/2)^2}{2a} = \frac{MV^2}{8F}.$$

를 얻는다. 이 값은 F가 커질수록 작아지므로, 가장 큰 힘이 가장 작은 z를 주고 그 반대도 성립한다.

$$\frac{MV^2}{8 \cdot \frac{11}{4} M\omega V} \le z \le \frac{MV^2}{8 \cdot \frac{9}{4} M\omega V}, \qquad \text{즉} \qquad \boxed{\frac{V}{22\,\omega} \le z \le \frac{V}{18\,\omega}}$$

("10% 이내"를 엄격한 의미로 읽으면 부등호도 엄격한 부등호가 된다). 힘이 전혀 바뀌지 않는다면 $z = V/(20\omega)$이고, 이는 이 범위의 한가운데에 있다.

검산

- 차원(dimensions): $M\omega v$가 힘이어야 하므로 ω의 단위는 s^{-1}이고, 따라서 V/ω는 길이이다. 두 답 모두 그래야 한다.
- 계수 $\frac{1}{2} - \arctan\frac{1}{3} \approx 0.1782$는 양수이고 $\frac{1}{2}$보다 작다. 당연히 그래야 한다. 우주선은 $\frac{1}{2}V$와 V 사이의 속력으로 움직이고 감속도는 적어도 $2\omega V$이므로, 이 구간을 지나는 데 걸리는 시간은 많아야 $1/(4\omega)$이고 이동 거리는 $V/(4\omega)$보다 작다.
- $V = \omega = 1$로 두고 $\dot{v} = -\omega(v^2 + V^2)/v$를 수치적으로 한 단계씩 계산하면 $v = \frac{1}{2}$가 되는 거리로 0.17825를 얻고, 일정한 힘이 작용하는 단계를 같은 방식으로 계산하면 힘이 110%, 100%, 90%일 때 각각 $z = 0.0455, 0.0500, 0.0556$을 얻는다. 이는 $\frac{1}{22}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{18}$과 일치한다.

흔한 실수

- $v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ 대신 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$를 쓰는 것: 이렇게 하면 거리가 아니라 시간이 나오고, 적분을 한 번 더 해야 한다.
- 경계를 거꾸로 짝짓는 것: **더 큰** 힘은 **더 짧은** 정지 거리를 주므로, 1.1배의 힘은 하한 $V/(22\omega)$에 대응한다.

STEP 너머

$a = v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$로 쓰는 것은 더 큰 아이디어를 처음 엿보는 것이다. 위치나 속력에만 의존하는 1차원 힘에 대해서는 시간 대신 다른 변수를 써서 방정식의 계수(order)를 낮출 수 있고, 힘이 위치에만 의존할 때에는 이것이 에너지 보존(energy conservation)과 운동의 위상 평면(phase plane) 그림으로 이어진다. 두 번째 부분은 **민감도**(sensitivity)에 관한 작은 연습

이다. 즉 자료의 불확실성(여기서는 힘의 $\pm 10\%$)이 답에(대략 z의 $\mp 10\%$로) 어떻게 전파되는지를 본다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 속도에 의존하는 힘을 이러한 관점에서 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.