풀이

STEP I 1989, 문제 1

순수수학 • 복합 영역의 넓이

> **STEP I 1989, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q1

핵심 아이디어

이 영역은 반원(semicircle)들로 이루어져 있다. 큰 반원판(half-disc) 하나에서 시작하여 작은 반원판들을 빼고 더하면 이 영역을 얻을 수 있다. 따라서 필요한 것은 각 반원의 반지름뿐이고, 특히 아래쪽 반원 CDE의 반지름이 중요한데, 이는 직선 AG 위의 길이들로부터 구할 수 있다. 반원을 포물선(parabola)으로 바꾸어도 방법은 달라지지 않는다. 포물선 아치에도 간단한 넓이 공식이 있어서 $\frac{1}{2}\pi a^2$의 역할을 대신하기 때문이다.

풀이

반원

A에서부터 직선을 따라 길이를 잰다. ABC의 반지름이 h이므로 $AC = 2h$이다. 마찬가지로 $EG = 2h$이고, AHG의 반지름이 r이므로 $AG = 2r$이다. 따라서

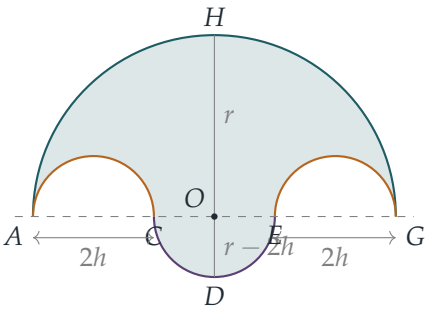
$$CE = 2r - 4h,$$

이고, $2h < r$이므로 이 값은 양수이다. 그러므로 반원 CDE의 반지름은 $r - 2h$이다. 그 중심은 CE의 중점이고, 대칭성에 의해 이는 AG의 중점이기도 하므로, 이 반원은 큰 반원과 중심 O를 공유한다.

그림에서 ABC와 EFG는 AG에 대하여 H와 같은 쪽, 즉 큰 반원의 안쪽에 있고, CDE는 반대쪽에 있다. 따라서 둘러싸인 영역은

$$(\text{반원판 } AHG) \;-\; (\text{반원판 } ABC \text{ 와 } EFG) \;+\; (\text{반원판 } CDE).$$

이다.



반지름이 a인 반원판의 넓이는 $\frac{1}{2}\pi a^2$이므로, 둘러싸인 넓이는

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\pi r^2 - 2\cdot\tfrac{1}{2}\pi h^2 + \tfrac{1}{2}\pi(r-2h)^2 &= \tfrac{1}{2}\pi(r^2 - 2h^2 + r^2 - 4rh + 4h^2)\\ &= \tfrac{1}{2}\pi(2r^2 - 4rh + 2h^2)\\ &= \pi(r-h)^2.\end{aligned}$$

? **생각해 보기** HD의 길이는 얼마인가?

점 H는 큰 반원의 꼭대기이므로, O를 지나고 AG에 수직인 직선 위에 있으며 O로부터의 거리는 r이다. 점 D는 CDE의 가장 낮은 점이므로 같은 수직선 위에 있으며, 직선의 반대쪽에서 O로부터 $r-2h$만큼 떨어져 있다. 따라서

$$HD = r + (r-2h) = 2(r-h),$$

이고, 지름이 HD인 원의 반지름은 $r-h$, 넓이는 $\pi(r-h)^2$이다. 이는 앞에서 구한 넓이와 같으므로 요구된 결과가 성립한다.

포물선

반지름이 a인 각 반원을, 길이가 $2a$인 같은 현(chord) 위에 놓이고 꼭짓점(vertex)이 현의 중점에서 높이 a만큼 위에 있는 포물선 아치로 바꾼다. 현의 중점을 원점으로 잡자. 포물선은 꼭짓점을 지나는 축에 대하여 대칭이므로 $y = a - kx^2$ 꼴이다. 이 포물선은 $(\pm a, 0)$을 지나므로 $k = 1/a$이다. 아치와 현 사이의 넓이는

$$\int_{-a}^{a}\left(a - \frac{x^2}{a}\right)\mathrm{d}x = 2a^2 - \frac{2a^3}{3a} = \frac{4a^2}{3}.$$

이다. (이것은 아르키메데스(Archimedes)의 결과로, 아치를 둘러싸는 직사각형 넓이의 3분의 2, 즉 $\frac{2}{3}\cdot 2a\cdot a$이다.)

각 아치는 여전히 원래의 반원과 같은 쪽, 즉 AG에 대하여 같은 쪽에 있다. 또한 각각의 작은 아치가 여전히 큰 아치 아래에 있는지도 확인해야 한다. 두 아치 모두 A에서 기울

기(gradient) 2로 출발하므로, A 근처에서는 이것이 자명하지 않다. A로부터의 거리가 x인 곳($0 \le x \le 2h$)에서 큰 아치의 높이는 $x(2r-x)/r$이고 아치 ABC의 높이는 $x(2h-x)/h$이다. 그 차는

$$\frac{x(2r-x)}{r} - \frac{x(2h-x)}{h} = x^2\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{r}\right) \ge 0,$$

이므로 ABC는 실제로 AHG 안에 있고, 대칭성에 의해 EFG도 마찬가지이다. 따라서 $\frac{1}{2}\pi a^2$ 대신 $\frac{4}{3}a^2$을 써서 같은 방식으로 더하고 빼면 된다.

$$\begin{aligned}\tfrac{4}{3}r^2 - 2\cdot\tfrac{4}{3}h^2 + \tfrac{4}{3}(r-2h)^2 &= \tfrac{4}{3}(2r^2 - 4rh + 2h^2)\\ &= \tfrac{8}{3}(r-h)^2.\end{aligned}$$

그러므로 포물선의 경우 둘러싸인 넓이는 $\frac{8}{3}(r-h)^2$이다.

검산

- 두 답 모두 $(r-h)^2$의 상수배이다. 두 계산의 구조가 완전히 같고, 아치 하나에 대한 계수만 $\frac{\pi}{2}$에서 $\frac{4}{3}$으로 바뀌므로 당연히 그래야 한다. 비 $\frac{8/3}{\pi} \approx 0.849$는 1보다 작은데, 같은 현과 높이를 가진 포물선 아치는 반원 안쪽에 있으므로 이것도 올바르다.
- 극한(limit)의 경우 $h \to 0$: 작은 아치들은 사라지고 CDE는 반지름이 r인 완전한 아래쪽 반원이 되어, 넓이가 πr^2인 원 전체가 된다. 공식 $\pi(r-h)^2$도 이와 일치한다.
- 수치적으로, $r = 3$, $h = 1$(시험지 그림의 비율)일 때 넓이는 $4\pi \approx 12.566$과 $\frac{32}{3} \approx 10.667$이다. 임의의 여덟 쌍 (r,h)에 대하여 경계를 따라 신발끈 공식(shoelace formula)으로 계산한 결과, 이산화 오차 범위 안에서 두 공식과 모두 일치하였다.

흔한 실수

- CDE의 반지름을 $r-h$나 $r-4h$로 잡는 것. AG 위의 길이를 그려 보면 $CE = 2r-4h$이므로 반지름은 $r-2h$이다.
- 위쪽의 작은 반원들을 빼지 않고 더하는 것. 이 반원들은 큰 반원판을 파고들어 가므로 그 넓이는 빼야 한다.

STEP 너머

첫 번째 부분의 도형은 아르키메데스가 연구한 **아르벨로스**(arbelos, "구두장이의 칼")이다. 고전적인 형태는 큰 반원 안에 작은 반원 두 개가 들어 있는 모양이며, 그 넓이 역시 잘 고른 현 위의 원의 넓이와 같다. 아르키메데스는 적분에 매우 가까운 극한 논증을 통해 포물선 조각에 대한 $\frac{2}{3}$ 법칙도 발견하였다. 대학에서는 그의 "실진법(method of exhaustion)"에서

리만 적분(Riemann integral)으로 나아가는 과정이 첫 해석학(analysis) 강의의 중심 내용이다. 이를 살펴보기에 좋은 책으로 Abbott, *Understanding Analysis*가 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.