풀이

STEP III 1988, 문제 8

순수수학 • 포물선의 접선과 법선

> **STEP III 1988, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/88-s3-q8

핵심 아이디어

모든 직선을 매개변수(parameter) t로 나타내고, 두 직선씩 만나는 점을 구한 다음, 그 꼭짓점(vertex)들을 행렬식(determinant)에 넣는다. 행렬식은 복잡해 보이지만 t_1, t_2, t_3에 대해 반대칭(antisymmetric)이므로, 각각은 $(t_1 - t_2)(t_2 - t_3)(t_3 - t_1)$의 배수여야 한다. 간단한 행 연산과 열 연산으로 이 인수를 끌어내면 두 넓이의 비교만 남는다.

(인쇄된 문제는 A_3를 구하라고 하지만, 이는 법선 삼각형의 넓이 A_2의 오식이다.)

풀이

접선과 법선

$x = at^2$, $y = 2at$를 따라 $y^2 = 4ax$를 t에 대해 미분하면 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2a}{2at} = \dfrac{1}{t}$이다. $(at^2, 2at)$에서의 접선(tangent)은 $y - 2at = \frac{1}{t}(x - at^2)$, 즉

$$ty = x + at^2.$$

이다. 이 꼴은 $t = 0$일 때에도 성립한다(꼭짓점에서의 접선은 $x = 0$이다). 법선(normal)의 기울기(gradient)는 $-t$이므로

$$y + tx = 2at + at^3.$$

이다. 앞으로 계속 $a \neq 0$이라 가정한다.

접선 삼각형

t_i와 t_j에서의 접선의 방정식을 빼면 $(t_i - t_j)y = a(t_i^2 - t_j^2)$이다. $t_i \neq t_j$이므로 나눌 수 있고, 따라서 $y = a(t_i + t_j)$이며 $x = t_i y - at_i^2 = at_i t_j$이다. 그러므로

$$\text{매개변수} t_i, t_j \text{에서의 접선의 교점은} (at_i t_j,\ a(t_i + t_j)).$$

접선들의 기울기 $1/t_i$는 서로 다르므로(또는 하나는 수직선이므로) 어느 두 접선도 평행하지 않고, 삼각형이 존재한다. $s = t_1 + t_2 + t_3$이라 하자. P_1의 맞은편 꼭짓점은 $(at_2t_3,\ a(s - t_1))$이고, 나머지도 마찬가지이다. 처음 두 열에서 인수 a를 꺼내고, 2열에 3열의 $-s$배를 더한 다음 2열의 부호를 바꾸면

$$\det \begin{pmatrix} at_2t_3 & a(s-t_1) & 1 \\ at_1t_3 & a(s-t_2) & 1 \\ at_1t_2 & a(s-t_3) & 1 \end{pmatrix} = -a^2 \det \begin{pmatrix} t_2t_3 & t_1 & 1 \\ t_1t_3 & t_2 & 1 \\ t_1t_2 & t_3 & 1 \end{pmatrix} = a^2 D,$$

이다. 여기서 처음 두 열을 맞바꾸었고, 다음과 같이 두었다.

$$D = \det \begin{pmatrix} t_1 & t_2t_3 & 1 \\ t_2 & t_1t_3 & 1 \\ t_3 & t_1t_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

D를 계산하기 위해 1행을 1행 − 2행으로, 2행을 2행 − 3행으로 바꾼다. 1행은 $(t_1 - t_2,\ t_3(t_2 - t_1),\ 0) = (t_1 - t_2)(1,\ -t_3,\ 0)$이 되고, 2행은 $(t_2 - t_3)(1,\ -t_1,\ 0)$이 된다. 마지막 열을 따라 전개하면

$$D = (t_1 - t_2)(t_2 - t_3) \det \begin{pmatrix} 1 & -t_3 \\ 1 & -t_1 \end{pmatrix} = (t_1 - t_2)(t_2 - t_3)(t_3 - t_1).$$

이다. 따라서

$$A_1 = \tfrac{1}{2} a^2 \left| (t_1 - t_2)(t_2 - t_3)(t_3 - t_1) \right|,$$

이고, t_i가 서로 다르므로 이 값은 0이 아니다.

법선 삼각형

t_i와 t_j에서의 법선의 방정식을 빼면 $(t_i - t_j)x = 2a(t_i - t_j) + a(t_i^3 - t_j^3)$이므로, $t_i - t_j \neq 0$으로 나누면

$$x = 2a + a(t_i^2 + t_i t_j + t_j^2), \qquad y = 2at_i + at_i^3 - t_i x = -at_i t_j (t_i + t_j).$$

이다. 법선들의 기울기 $-t_i$는 서로 다르므로, 이번에도 모든 두 법선은 서로 만난다. P_1의 맞은편 꼭짓점에 대해 $t_2 + t_3 = s - t_1$을 이용하고 $e_1 = t_2t_3$이라 하자(또 $e_2 = t_1t_3$, $e_3 = t_1t_2$라 하자). 그러면

$$t_2^2 + t_2t_3 + t_3^2 = (t_2 + t_3)^2 - t_2t_3 = (s - t_1)^2 - e_1, \qquad -t_2t_3(t_2 + t_3) = -se_1 + p,$$

이고, 여기서 $p = t_1t_2t_3$이다. 그러므로 꼭짓점은 $a(2 + (s - t_1)^2 - e_1,\ -se_1 + p)$이고, 나머지도 마찬가지이다. 이제 a^2을 꺼내고, 행렬식을 바꾸지 않는 열 연산을 한다. 1열에서 3열의 2배를 빼고, 2열에서 3열의 p배를 뺀 다음, 2열에서 인수 $-s$를 꺼낸다.

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^2}\det(\text{법선 삼각형의 꼭짓점}) &= \det\begin{pmatrix}(s-t_i)^2 - e_i & -se_i & 1\end{pmatrix}_{i=1,2,3}\\ &= -s\det\begin{pmatrix}(s-t_i)^2 - e_i & e_i & 1\end{pmatrix}_{i=1,2,3},\end{aligned}$$

여기서 각 식은 전형적인 i행을 나타낸다. 다음으로 1열에 2열을 더해 $-e_i$를 없애고, $(s - t_i)^2 = s^2 - 2st_i + t_i^2$으로 전개한다. s^2은 3열의 배수이므로 없앨 수 있고, 행렬식은 1열에 대해 선형이다.

$$\det\begin{pmatrix}t_i^2 - 2st_i & e_i & 1\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}t_i^2 & e_i & 1\end{pmatrix} - 2s\det\begin{pmatrix}t_i & e_i & 1\end{pmatrix} = E - 2sD,$$

라 하자. 두 번째 행렬식은 정확히 D이다.

? 생각해 보기 행이 $(t_i^2,\ e_i,\ 1)$인 행렬식 E는 어떻게 계산할까?

D에서와 같은 행 연산을 쓴다. 1행 $-$ 2행은 $(t_1^2 - t_2^2,\ t_3(t_2 - t_1),\ 0) = (t_1 - t_2)(t_1 + t_2,\ -t_3,\ 0)$이고, 2행 $-$ 3행은 $(t_2 - t_3)(t_2 + t_3,\ -t_1,\ 0)$이다. 따라서

$$\begin{aligned}E &= (t_1 - t_2)(t_2 - t_3)[-t_1(t_1 + t_2) + t_3(t_2 + t_3)]\\ &= (t_1 - t_2)(t_2 - t_3)[(t_3^2 - t_1^2) + t_2(t_3 - t_1)]\\ &= (t_1 - t_2)(t_2 - t_3)(t_3 - t_1)(t_1 + t_2 + t_3) = sD.\end{aligned}$$

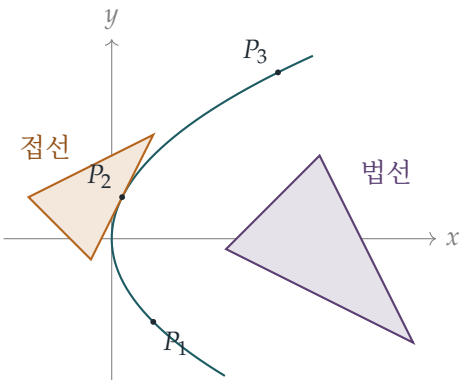
이다. 모두 종합하면

$$\det(\text{법선 삼각형의 꼭짓점}) = a^2 \cdot (-s)\,(sD - 2sD) = a^2s^2D.$$

이다. 절댓값의 절반을 취하고 $A_1 = \frac{1}{2}a^2|D|$와 비교하면

$$A_2 = (t_1 + t_2 + t_3)^2 A_1,$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.



그림은 $a = 1, t_1, t_2, t_3 = -1, \frac{1}{2}, 2$로 잡은 것이므로 $s = \frac{3}{2}$이다. 접선 삼각형(호박색)의 넓이는 $\frac{27}{8}$이고, 법선 삼각형(자주색)의 넓이는 $\frac{243}{32} = (\frac{3}{2})^2 \cdot \frac{27}{8}$이다.

법선이 한 점에서 만나는 것은 언제인가?

어느 두 법선도 평행하지 않으므로, 법선들은 두 개씩 세 점 Q_{12}, Q_{13}, Q_{23}에서 만난다. 법선들이 한 점에서 만나면(concurrent) 이 점들은 일치하고 삼각형의 넓이는 0이다. 역으로, 넓이가 0이지만 세 점이 모두 같지는 않다고, 예컨대 $Q_{12} \neq Q_{13}$이라고 하자. 두 점은 모두 P_1에서의 법선 위에 있으므로, 두 점을 지나는 직선은 그 법선이다. 세 점은 한 직선 위에 있으므로(collinear) Q_{23}도 P_1에서의 법선 위에 있다. 그러면 Q_{23}은 세 법선 모두 위에 있으므로 $Q_{23} = Q_{12}$(P_1과 P_2에서의 법선의 유일한 공통점)이고, 마찬가지로 $Q_{23} = Q_{13}$이 되어 모순이다. 따라서

$$\text{법선이 한 점에서 만남} \iff A_2 = 0 \iff (t_1 + t_2 + t_3)^2 A_1 = 0 \iff t_1 + t_2 + t_3 = 0,$$

이다. 여기서 t_i가 서로 다르므로 $A_1 \neq 0$임을 이용했다. 구하는 조건은 $t_1 + t_2 + t_3 = 0$이다.

검산

- $t_1, t_2, t_3 = 0, 1, 2$, $a = 1$이면 접선 삼각형의 꼭짓점은 $(2, 3)$, $(0, 2)$, $(0, 1)$이고 넓이는 1이며, $\frac{1}{2}|D| = \frac{1}{2}|(-1)(-1)(2)| = 1$이다.
- $t = 1, 2, -3$(합이 0, $a = 1$)에서의 법선은 모두 $(9, -6)$을 지난다. 예를 들어 $t = 1$에서의 법선은 $y + x = 3$이다.
- 컴퓨터로 a와 서로 다른 t_i를 무작위로 약 2,800번 골라 분수로 꼭짓점을 정확히 계산했고, 매번 $A_2 = (t_1 + t_2 + t_3)^2 A_1$임을 확인했다.

흔한 실수

- 세 직선이 실제로 삼각형을 이룬다는 것을 정당화하지 않는 것. 필요한 것은 어느 두 직선도 평행하지 않다는 것이고, 여기서는 기울기가 서로 다르다는 데서 나온다.
- 근거 없이 $A_2 = 0$에서 한 점에서 만난다고 결론짓는 것. 넓이가 0이라는 것은 세 교점이 한 직선 위에 있다는 것만 말해 주며, 위의 짧은 논증이 이를 "같음"으로 끌어올린다.
- 3×3 행렬식을 전부 전개하는 것. 가능하기는 하지만 부호 실수가 거의 확실히 생긴다. 먼저 행 연산으로 $(t_i - t_j)$를 인수로 꺼내자.

STEP 너머

인수 $(t_1 - t_2)(t_2 - t_3)(t_3 - t_1)$은 방데르몽드 행렬식(Vandermonde determinant)이고, $E = sD$에서 곱해진 인수 $t_1 + t_2 + t_3$은 대칭 다항식(symmetric polynomial)이다. 모든 반대칭 다항식은 방데르몽드 곱과 어떤 대칭 다항식의 곱이며, 이 사실은 행렬식과 대칭 함수의 이론에서 다시 등장한다. 법선 삼각형은 포물선(parabola)의 **축폐선**(evolute)과 관련이 있는데, 축폐선은 곡률 중심(centres of curvature)이 그리는 곡선이며 법선들의 포락선(envelope)이다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 행렬식과 그 행 연산을 잘 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.