풀이

STEP III 1988, 문제 6

순수수학 • 반복 미분

> **STEP III 1988, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/88-s3-q6

핵심 아이디어

곱을 직접 1988번 미분하는 것은 가망이 없지만, 사인과 코사인의 곱은 **합**으로 다시 쓸 수 있다. 그러면 각 항 $\sin kx$는 네 단계의 주기로 미분되며, 미분할 때마다 인수 k가 하나씩 붙는다. 영점(zero)에 대해서는 $\sin 3x$ 앞에 붙은 거대한 인수 3^{1988} 때문에 도함수(derivative)는 $\sin 3x$가 거의 0인 곳에서만 0이 될 수 있다. 따라서 $\sin 3x$의 첫 번째 영점 바로 다음을 살펴보고 선형 근사(linearise)한다.

풀이

1988계 도함수

곱을 합으로 바꾸는 공식(product-to-sum formula) $2\sin A\cos B = \sin(A+B)+\sin(A-B)$에 의해

$$\mathrm{f}(x) = \sin 2x\cos x = \tfrac{1}{2}\left(\sin 3x + \sin x\right).$$

$\sin kx$를 네 번 미분하면

$$\sin kx \;\to\; k\cos kx \;\to\; -k^2\sin kx \;\to\; -k^3\cos kx \;\to\; k^4\sin kx,$$

이므로, 네 번 미분할 때마다 $\sin kx$에 단순히 k^4가 곱해진다. (같은 말로, $\sin kx$의 n계 도함수는 $k^n\sin\left(kx+\frac{1}{2}n\pi\right)$이다.) $1988 = 4\times 497$이므로

$$\mathrm{f}^{(1988)}(x) = \tfrac{1}{2}\left(3^{1988}\sin 3x + \sin x\right).$$

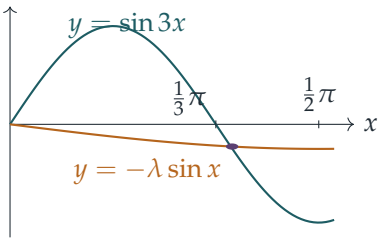
가장 작은 양의 영점

다음을 만족하는 가장 작은 $x > 0$을 구해야 한다.

$$3^{1988} \sin 3x + \sin x = 0. \qquad (*)$$

$(0, \frac{1}{3}\pi]$에는 영점이 없다. $0 < x < \frac{1}{3}\pi$이면 $0 < 3x < \pi$이므로 $\sin 3x$와 $\sin x$가 모두 양수이고, $(*)$의 좌변은 양수이다. $x = \frac{1}{3}\pi$에서 좌변은 $0 + \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$이다.

$\frac{1}{3}\pi$ 바로 다음의 영점. $x = \frac{1}{2}\pi$에서 좌변은 $3^{1988} \sin \frac{3}{2}\pi + 1 = 1 - 3^{1988} < 0$이다. 좌변은 연속이므로 중간값 정리(intermediate value theorem)에 의해 $(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi)$에 영점이 존재하며, 가장 작은 양의 영점은 이들 중 첫 번째 것이다. 이를 $0 < \epsilon < \frac{1}{6}\pi$인 $x = \frac{1}{3}\pi + \epsilon$으로 쓰자.



위 그림은 $\lambda = 3^{-1988}$으로 두고 $(*)$를 $\sin 3x = -\lambda \sin x$로 나타낸 것이다(실제보다 훨씬 크게 그렸다). 두 곡선은 $\sin 3x$가 $\frac{1}{3}\pi$에서 0을 지난 직후에 처음 만난다. 실제의 아주 작은 λ에 대해서는 이 교점이 거의 $\frac{1}{3}\pi$ 위로 밀려난다.

$\sin(\pi + 3\epsilon) = -\sin 3\epsilon$이므로 방정식 $(*)$는 다음이 된다.

$$3^{1988} \sin 3\epsilon = \sin\left(\tfrac{1}{3}\pi + \epsilon\right). \qquad (**)$$

? **생각해 보기** $\sin 3\epsilon \approx 3\epsilon$을 써도 될 만큼 ϵ이 작다는 것을 어떻게 알 수 있는가?

$(**)$의 우변은 많아야 1이므로 $\sin 3\epsilon \le 3^{-1988}$이다. $0 < 3\epsilon < \frac{1}{2}\pi$이고, $[0, \frac{1}{2}\pi]$에서 $\sin t \ge \frac{2t}{\pi}$이므로(그 구간에서 사인 곡선은 현(chord)보다 위에 있다) $3\epsilon \le \frac{\pi}{2} 3^{-1988}$을 얻는다. 따라서 ϵ은 천문학적으로 작으며, 이것이 아래의 근사를 정당화한다.

ϵ이 이렇게 작으므로 $\sin 3\epsilon = 3\epsilon\,(1 + O(\epsilon^2))$이고 $\sin(\frac{1}{3}\pi + \epsilon) = \frac{\sqrt{3}}{2} + O(\epsilon)$이다. 이를 $(**)$에 대입하면

$$3^{1989}\,\epsilon \approx \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \text{이므로} \qquad \epsilon \approx \frac{3^{-1989}\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3^{-1988}\sqrt{3}}{2},$$

이며, 상대 오차(relative error)는 3^{-1988} 정도이다.

시험지에 인쇄된 값에 대하여. 시험지는 $\epsilon \approx \frac{1}{2}3^{-1988}\sqrt{3}$을 요구하는데, 이는 여기서 구한 값의 세 배이다. 인수 3은 $\sin 3\epsilon \approx 3\epsilon$에서 나오며, 아래의 수치 검산도 3^{-1988}이 아니라 3^{-1989}임을 확인해 준다. 따라서 문제에 실수가 있는 것으로 보인다. 문제가 의도한 방법은 위와 정확히 같고, 3의 거듭제곱 지수만 하나 어긋나 있다. 3^{-1989}을 얻었다면 자신의 풀이를 믿어라.

검산

- 같은 논증은 4의 임의의 배수 n에 대해 성립한다. $3^n \sin 3x + \sin x$의 첫 번째 양의 영점은 $\frac{1}{3}\pi + \epsilon_n$이고 $\epsilon_n \approx \frac{1}{2}3^{-(n+1)}\sqrt{3}$이다. $n = 4$일 때 수치적으로 풀면 $\epsilon_4 = 3.5713 \times 10^{-3}$이고, 예측값은 $\frac{1}{2}\sqrt{3}/3^5 = 3.5640 \times 10^{-3}$이다(비 1.0021). $n = 8$이면 비는 1.000025이고, $n = 40$ 이상이면 기계 정밀도(machine precision) 안에서 1이다. $\frac{1}{2}\sqrt{3}/3^n$에 대한 비는 $\frac{1}{3}$으로 수렴한다.
- 도함수 공식은 처음 몇 경우로 확인할 수 있다. $f^{(4)}(x) = \frac{1}{2}(81\sin 3x + \sin x)$이며, 이는 $\frac{1}{2}(\sin 3x + \sin x)$를 네 번 미분하여 확인할 수 있다.

흔한 실수

- 부호나 위상을 틀리는 것: $\sin kx$는 4의 배수 번 미분한 뒤에야 $+k^n \sin kx$로 돌아온다.
- $(0, \frac{1}{3}\pi)$에 영점이 없음을 보이는 것을 잊는 것: 그 구간에서의 부호 논증이 $\frac{1}{3}\pi + \epsilon$을 **가장 작은** 양의 영점으로 만들어 준다.
- $\sin(\pi + 3\epsilon) \approx \epsilon$이라고 써서, -3ϵ의 부호나 인수 3을 잃어버리는 것.

STEP 너머

둘째 부분은 **섭동 이론**(perturbation theory)의 간단한 예이다. 큰 매개변수 때문에 해가 이미 알고 있는 근에 아주 가까이 놓이게 되고, 그 근 주위에서 선형 근사하면 주된 보정항을 얻으며, 오차의 크기는 테일러 급수(Taylor series)의 다음 항으로 조절된다. "근사적으로 같다"는 말을 $O(\cdot)$ 표기와 오차 한계로 엄밀하게 만드는 것은 대학 첫 해석학(analysis) 강의의 핵심 주제이다. Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.