풀이

STEP III 1988, 문제 5

순수수학 • 점화식과 대출

> **STEP III 1988, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/88-s3-q5

핵심 아이디어

하루 동안 빚에 어떤 일이 일어나는지 적어 본다. 매일 빚에 $1+k$가 곱해지고(이자), 그다음 일정한 금액이 더해지거나(굴착 비용) 빠진다(수입). $S_n = (1+k)S_{n-1} +$ 상수 꼴의 점화식(recurrence)을 풀어 펼치면 등비급수(geometric series)가 된다. 그러면 마지막 부분은 하나의 비교로 귀결된다. 터널이 개통되는 순간, 하루 수입이 빚에 붙는 이자보다 큰가?

풀이

터널을 파는 동안의 빚

이자율(interest rate)이 $100k\%$라는 것은 £S의 빚에 대한 하루 이자가 £kS라는 뜻이다. 제 n일이 끝날 때의 빚(파운드 단위)을 S_n이라 하고, $S_0 = 0$이라 하자. $n \le T$인 제 n일이 끝날 때 회사는 굴착 비용으로 c를, 이자로 kS_{n-1}을 빌리므로

$$S_n = S_{n-1} + kS_{n-1} + c = (1+k)S_{n-1} + c.$$

$S_0 = 0$에서 출발하여 이 식을 반복해서 적용하면

$$\begin{aligned} S_n &= c + (1+k)S_{n-1} \\ &= c + c(1+k) + (1+k)^2 S_{n-2} \\ &= \cdots = c[1 + (1+k) + (1+k)^2 + \cdots + (1+k)^{n-1}]. \end{aligned}$$

이것은 항이 n개이고 공비(common ratio)가 $1+k \neq 1$인($k > 0$이므로) 등비급수이므로

$$S_n = \frac{c[(1+k)^n - 1]}{k}, \qquad n \le T,$$

이고, 이것이 구하려던 식이다. (신중을 기하려면 수학적 귀납법(induction)으로 확인한다. 이 식은 $S_0 = 0$을 주고, S_{n-1}에 대해 성립하면 $(1+k)S_{n-1} + c = \frac{c}{k}[(1+k)^n - (1+k) + k]$이며, 이는 S_n에 대한 식이다.)

터널이 개통된 뒤의 빚

제 $T+1$일부터는 더 이상 굴착이 없다. 매일 빚에는 이자 kS가 붙고 회사는 d를 갚으므로, 빚이 아직 양수인 동안에는

$$S_{T+j} = (1+k)S_{T+j-1} - d.$$

이것은 앞의 점화식에서 c를 $-d$로 바꾼 것과 같지만, 이번에는 0이 아니라 S_T에서 출발한다. 이를 m번 펼치면

$$\begin{aligned} S_{T+m} &= (1+k)^m S_T - d[1 + (1+k) + \cdots + (1+k)^{m-1}] \\ &= (1+k)^m S_T - \frac{d[(1+k)^m - 1]}{k}. \end{aligned}$$

첫 번째 부분에서 구한 S_T를 대입하면

$$S_{T+m} = \frac{c[(1+k)^T - 1](1+k)^m - d[(1+k)^m - 1]}{k}.$$

이 점화식은 빚을 아직 갚아 나가는 동안에만 적용되므로 $S_{T+m} > 0$이어야 한다. 빚을 다 갚는 날에는 회사가 d 전액이 아니라 남은 빚만큼만 낸다.

빚을 다 갚는 시점

$(1+k)^m$이 들어 있는 항끼리 모으면

$$S_{T+m} = \frac{d}{k} - \frac{(1+k)^m}{k}\Big(d - c[(1+k)^T - 1]\Big).$$

? **생각해 보기** 조건 $d/c > (1+k)^T - 1$은 돈의 관점에서 실제로 무엇을 뜻하는가?

양변에 c를 곱하면 $d > c[(1+k)^T - 1] = kS_T$가 된다. 즉, 첫날의 수입이 터널 개통 시점의 빚에 붙는 이자보다 크다는 뜻이다. 따라서 제 $T+1$일에 빚이 줄어들고, 그러면 이자도 줄어들므로 빚은 점점 더 빠르게 줄어든다. 이를 대수적으로 엄밀하게 밝혀 보자.

$d > c[(1+k)^T - 1]$이라 가정하고 $\delta = d - c[(1+k)^T - 1] > 0$이라 쓰자. 그러면

$$S_{T+m} = \frac{d - \delta(1+k)^m}{k}.$$

$1+k > 1$이므로 $m \to \infty$일 때 $(1+k)^m \to \infty$이고, 따라서 $\delta(1+k)^m$은 결국 d보다 커진다. 이 식은 빚이 양수인 동안에만 성립하므로 영원히 성립할 수는 없다. 남은 빚이 d에 그날의

이자를 더한 값 이하가 되는 첫날이 있고, 그날 회사는 빚을 모두 갚는다. 실제로 빚은 다음을 만족하는 가장 작은 m에 대하여 제 $T+m$일에 청산된다.

$$(1+k)^m \geq \frac{d}{\delta}, \qquad \text{즉,} \qquad m \geq \frac{\ln(d/\delta)}{\ln(1+k)}.$$

따라서 $d/c > (1+k)^T - 1$이면 회사는 결국 빚을 모두 갚으며, 이것이 보이려던 것이다.

이 조건은 필요조건(necessary condition)이기도 하다. $d \leq kS_T$이면 $\delta \leq 0$이고, $S_T = (d-\delta)/k$이므로 모든 m에 대하여

$$S_{T+m} - S_T = \frac{-\delta[(1+k)^m - 1]}{k} \geq 0$$

이다. 빚은 결코 S_T 아래로 내려가지 않으므로 절대 다 갚을 수 없다.

검산

- $n = 1$을 대입하면 $S_1 = c$이다. 제 1일에는 빚진 것이 없어 이자가 붙지 않으므로 옳다.
- S_{T+m}의 식에 $m = 0$을 대입하면 당연히 S_T가 나온다.
- 정확히 $d = kS_T$이면 $\delta = 0$이고 모든 m에 대하여 $S_{T+m} = d/k = S_T$이다. 수입이 이자를 딱 메울 뿐이어서 빚은 전혀 변하지 않는다. 이것이 경계의 경우이다.
- $c = 100, k = 0.01, T = 30$으로 하루씩 모의 계산하면 $S_T \approx 3478.49$이고, 식도 같은 값을 준다. 기준값은 $d > 34.78$이다. $d = 50$이면 $m = 120$일 뒤에 빚이 청산되며, 이는 $\ln(50/15.22) / \ln 1.01 \approx 119.6$과 맞아떨어진다.

흔한 실수

- 제 1일에 이자를 붙이거나, 급수의 항을 $n+1$개로 세는 실수. $S_0 = 0$이므로 첫날의 비용은 정확히 c이다.
- 제 T일 이후에는 급수가 0이 아니라 S_T에서 출발한다는 것을 잊는 실수. $(1+k)^m S_T$ 항을 빠뜨리기 쉽다.
- "d가 c보다 크기 때문에" 빚을 다 갚는다고 말하는 실수. 중요한 것은 d와 개통 시점의 이자 kS_T의 비교이다.

STEP 너머

점화식 $S_n = aS_{n-1} + b$는 가장 간단한 **선형 1계 차분방정식**(*linear first-order difference equation*)이다. 그 해는 고정점(fixed point) $b/(1-a)$에 a^n의 상수배를 더한 것이며, 이는

바로 우리 식의 모양, 즉 d/k에 $(1+k)^m$의 상수배를 더한 꼴이다. 그 상수배가 양수인지 음수인지에 따라 빚이 불어나는지 상환되는지가 결정되는데, 이 아이디어는 고정점의 안정성(stability)과 선형 상미분방정식(linear ODE)에서 다시 나타난다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 차분방정식을 미분방정식과 나란히 다루며, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)에는 점화식에 관한 STEP 연습 문제가 더 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.