풀이

STEP III 1988, 문제 4

순수수학 • 호의 길이 최적화

> **STEP III 1988, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/88-s3-q4

핵심 아이디어

도로의 전체 길이를 함수 $L(b)$로 나타내고 미분한다. 수직 평면 위의 두 구간은 지면을 따라 가야 하므로, 그 길이는 포물선의 호의 길이(arc length)이다. 반원의 길이는 πb이다. 호의 길이를 나타내는 적분을 아래끝에 대해 미분하는 데에는 적분 계산이 전혀 필요하지 않으며, $L'(b)$의 부호가 모든 것을 결정한다.

(문제에 인쇄된 단면(cross-section)의 식은 좌변이 $x=$로 되어 있는데, 당연히 $z=$이어야 한다.)

풀이

길이 식 세우기

$h(b) = (a^2 - b^2)/(2a)$라 하자. 이는 축으로부터 거리 b인 곳에서 언덕의 높이이다. 도로는 지면 위에 놓여야 하므로, (x, z) 평면에서 $(-R, 0)$부터 $(-b, h(b))$까지 가는 경로는 달리 선택의 여지가 없다. 즉 평평한 평면을 따라 $x = -R$에서 $x = -a$까지 간 다음, 포물선을 따라 $x = -a$에서 $x = -b$까지 올라간다. 구간 (iii)은 이것의 거울상이다.

언덕 위에서는 $z = (a^2 - x^2)/(2a)$이므로 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{x}{a}$이고, $x = b$부터 $x = a$까지의 호의 길이는

$$\int_b^a \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x.$$

이다. 반원 (ii)는 높이 $h(b)$에 있는 수평한 반원이고 반지름은 b이다(이는 $(\pm b, h(b))$를 지나는 언덕의 위도원(circle of latitude)이다). 따라서 그 길이는 πb이다. 그러므로

$$L(b) = 2(R - a) + 2\int_b^a \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x + \pi b, \qquad 0 \le b \le a.$$

이 식은 $b = 0$인 경우(반원이 없고 도로가 꼭대기를 곧장 넘어가는 경우)와 $b = a$인 경우(도로가 언덕 기슭을 돌아가는 경우)도 포함한다.

최소화하기

미적분학의 기본정리(fundamental theorem of calculus)에 의해, 아래끝에 대해 미분하면 그 점에서의 피적분함수(integrand)에 음의 부호를 붙인 값이 된다.

$$L'(b) = \pi - 2\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}.$$

생각해 보기 정류점(stationary point)은 어디에 있을까? 그리고 그 점은 허용되는 범위에 있는가?

$L'(b) = 0$이 되려면 $1 + b^2/a^2 = \pi^2/4$, 즉 $b = \frac{a}{2}\sqrt{\pi^2 - 4} \approx 1.21a$이어야 한다. 이 값은 a보다 크므로 허용 범위 $0 \le b \le a$ 밖에 있다. 실제로 $0 \le b \le a$에서

$$2\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} \le 2\sqrt{2} \approx 2.83 < \pi,$$

이므로 구간 전체에서 $L'(b) > 0$이다. L은 순증가하고, 최솟값은 왼쪽 끝점 $b = 0$에서 얻어진다.

조언: $b = 0$으로 정한다. 도로는 반원 모양으로 우회하지 말고 언덕 한쪽을 곧장 올라갔다가 반대쪽으로 내려가야 한다.

얼마나 절약되는가

참고로, 원시함수(antiderivative)는

$$\int \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} + \frac{a}{2}\sinh^{-1}\frac{x}{a} + C,$$

이다($x = a\sinh t$로 치환한다). 따라서

$$L(0) = 2(R - a) + a(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})) \approx 2(R - a) + 2.296a,$$

이고, 기슭을 돌아가면 $L(a) = 2(R - a) + \pi a \approx 2(R - a) + 3.142a$이다. 꼭대기를 넘어가면 약 $0.85a$만큼 절약된다.

검산

- 답은 R에 의존하지 않는데, 이는 당연하다. 평평한 구간들의 전체 길이는 b가 무엇이든 $2(R - a)$이다.

- 대략적인 타당성 검토: 언덕의 높이는 $a/2$, 폭은 $2a$에 불과하므로, 언덕을 넘어가도 직선 거리 $2a$보다 크게 늘어날 수 없다. 기슭을 도는 반원의 길이는 πa이다. 실제로 $2.296a$는 $2a$와 πa 사이에 있다.
- 수치적으로, $a = 1$, $R = 3$으로 두고 $[0, 1]$의 201개 점에서 수치 적분(quadrature)으로 $L(b)$를 계산하면 가장 작은 값은 $b = 0$에서 나온다. 또한 $L'(a) = \pi - 2\sqrt{2} \approx 0.313$도 여전히 양수이다.

흔한 실수

- $L'(b) = 0$으로 놓고 $b = \frac{a}{2}\sqrt{\pi^2 - 4}$를 답으로 제시하면서, 이 값이 a보다 크다는 것을 알아차리지 못하는 경우.
- 구간 (i)과 (iii)에 직선(현, chord)의 길이를 사용하는 경우: 그런 도로는 언덕을 관통하는 터널이 된다.
- 닫힌구간(closed interval)에서의 최솟값이 끝점에서 나타날 수 있다는 사실을 잊는 경우.

STEP 너머

곡면 위에서 최단 경로를 찾는 것은 **측지선**(geodesics)의 문제로, 변분법(calculus of variations)이나 미분기하학(differential geometry)의 첫 강의에서 만나게 된다. 회전면(surface of revolution) 위에서는 클레로(Clairaut)의 관계식이 측지선을 깔끔하게 기술한다. 왕의 도로들의 모임은 이 문제를 매개변수 하나로 잘라 낸 작은 단면이다. 여기서 사용한 두 가지 해석학적 사실, 즉 적분을 끝에 대해 미분하는 것과 닫힌구간에서 연속인 함수가 최솟값을 갖는다는 사실은 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)에서 엄밀하게 증명되어 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.