풀이

STEP III 1988, 문제 3

순수수학 • 복소평면 위의 자취

STEP III 1988, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/88-s3-q3

핵심 아이디어

사상(map) $w = (z+\mathrm{i})/(z-\mathrm{i})$는 거꾸로 풀 수 있다. z에 대해 풀면 $z = \mathrm{i}(w+1)/(w-1)$이므로, z에 대한 어떤 조건도 w에 대한 조건으로 바뀐다. 원의 경우에는 그 대신 매개변수 표시(parametrisation)가 일을 해 준다. 그때 $z-\mathrm{i}$가 그냥 $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$가 되기 때문이다. 실수인 경우와 순허수(imaginary)인 경우에는 절댓값(modulus)과 편각(argument)을 생각하라. 실수 z는 i와 $-\mathrm{i}$에서 같은 거리에 있다.

풀이

매개변수 표시

곡선 $|z-\mathrm{i}| = 2$는 중심이 i이고 반지름이 2인 원이므로

$$z = \mathrm{i} + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \qquad -\pi < \theta \leq \pi,$$

이다. 또는 $z = x + \mathrm{i}y$로 쓰면 $x = 2\cos\theta$, $y = 1 + 2\sin\theta$이다.

역사상(inverse map)도 사용할 것이다. $w(z-\mathrm{i}) = z + \mathrm{i}$에서 $z(w-1) = \mathrm{i}(w+1)$을 얻으므로, $w \neq 1$이면 다음과 같다.

$$z = \frac{\mathrm{i}(w+1)}{w-1}.$$

어떤 z도 $w = 1$을 주지 않는다. 그러려면 $z + \mathrm{i} = z - \mathrm{i}$여야 하기 때문이다. $w \neq 1$인 모든 점은 정확히 하나의 $z \neq \mathrm{i}$에서 온다.

소문항 (i)

매개변수 표시를 대입하면 $z+\mathrm{i} = 2\mathrm{i} + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$이고 $z-\mathrm{i} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$이므로

$$w = \frac{2\mathrm{i} + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = 1 + \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/2-\theta)}.$$

θ가 한 바퀴 도는 동안 $\pi/2-\theta$도 모든 각을 한 번씩 취한다. 따라서 w는

$$|w-1| = 1,$$

즉 중심이 1이고 반지름이 1인 원 **전체**를 그린다. 예를 들어 $z = 3\mathrm{i}$이면 $w = 2$이고, $z = -\mathrm{i}$이면 $w = 0$이다. 점 $w = 1$은 이 원 위에 있지 않은데, 이는 이 값이 결코 나오지 않는다는 사실과 들어맞는다.

소문항 (ii)

$z = x$가 실수이면 i와 $-\mathrm{i}$에서 같은 거리에 있으므로 $|x+\mathrm{i}| = |x-\mathrm{i}|$이고, 다음이 성립한다.

$$|w| = \frac{|x+\mathrm{i}|}{|x-\mathrm{i}|} = 1.$$

구체적으로, 분자와 분모에 $x+\mathrm{i}$를 곱하면 다음을 얻는다.

$$w = \frac{(x+\mathrm{i})^2}{x^2+1} = \frac{x^2-1}{x^2+1} + \mathrm{i}\,\frac{2x}{x^2+1}.$$

생각해 보기 단위원(unit circle)의 모든 점에 도달하는가?

꼭 그렇지는 않다. $|w| = 1$이고 $w \neq 1$인 임의의 w를 잡고 $w = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$로 쓰자. 그러면

$$z = \mathrm{i}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}+1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}-1} = \mathrm{i}\,\frac{2\cos(\phi/2)}{2\mathrm{i}\sin(\phi/2)} = \cot\tfrac{\phi}{2},$$

이고, 이는 실수이다. 따라서 그러한 점은 모두 나타나지만, $w = 1$은 결코 나타나지 않는다. 이것은 $x \to \pm\infty$일 때의 극한이다. 자취(locus)는 단위원 $|w| = 1$에서 한 점 $w = 1$을 뺀 것이다. 예를 들어 $x = 0$이면 $w = -1$이고, $x = 1$이면 $w = \mathrm{i}$이다.

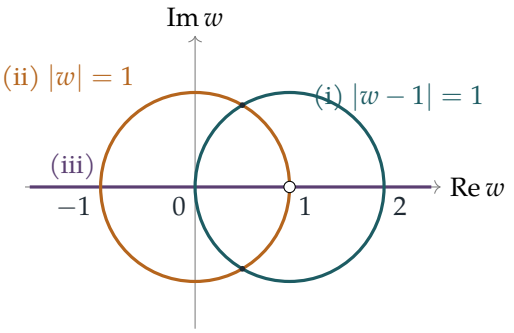
소문항 (iii)

$z = \mathrm{i}y$이고 y가 실수이며 $y \neq 1$이면

$$w = \frac{\mathrm{i}(y+1)}{\mathrm{i}(y-1)} = \frac{y+1}{y-1} = 1 + \frac{2}{y-1},$$

이고, 이는 실수이다. y가 1이 아닌 모든 실수를 움직이면 분수 $2/(y-1)$은 영이 아닌 모든 실수 값을 취하므로, w는 1을 제외한 모든 실수 값을 취한다. (역으로, $w = u$가 실수이고 $u \neq 1$이면 $z = \mathrm{i}(u+1)/(u-1)$은 순허수이다.) 자취는 실수축에서 점 $w = 1$을 뺀 것이다. 여기서 $z = 0$이면 $w = -1$이다. "순허수"를 $z = 0$을 제외하는 뜻으로 읽는다면 $w = -1$도 함께 빠진다.

그림



청록색 원은 (i)의 자취이고, 호박색 원(점 1 제외)은 (ii)의 자취이며, 보라색 축(점 1 제외)은 (iii)의 자취이다. 속이 빈 점은 결코 나타나지 않는 $w = 1$을 표시한다.

검산

- (i)의 원은 실수축과 $z = \pm\sqrt{3}$에서 만난다. 이 점들은 청록색 원과 호박색 원 모두의 위에 있는 점으로 옮겨져야 하는데, 실제로 $w(\sqrt{3}) = (\sqrt{3}+\mathrm{i})^2/4 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \approx 0.5 + 0.866\mathrm{i}$이고, 이는 $|w| = 1$ 위에도, $|w-1| = 1$ 위에도 있다.
- (i)의 원은 허수축과 $3\mathrm{i}$와 $-\mathrm{i}$에서 만나고, 이 점들은 2와 0으로 옮겨진다. 정확히 청록색 원이 실수축과 만나는 곳이다.
- 각 자취 위의 무작위 점 10^4개에 대한 수치 검사로 $|w-1| = 1$, $|w| = 1$, $\mathrm{Im}\, w = 0$이 확인되었고, 역사상이 z를 되찾는다는 것도 확인되었다.

흔한 실수

- (ii)와 (iii)에서 $w = 1$이 빠진다는 것을 잊는 것. 이 점은 "$z = \infty$"에 해당한다.
- (i)에서 x와 y로 전개하다가 계산 속에서 길을 잃는 것. 매개변수 표시를 쓰면 $z - \mathrm{i}$가 하나의 지수 함수가 되고, 나머지는 한 줄이면 된다.

STEP 너머

사상 $z \mapsto (z+\mathrm{i})/(z-\mathrm{i})$는 뫼비우스 변환(Möbius transformation)이다. 이러한 사상은 항상 원과 직선을 원과 직선으로 보내며, 이것이 바로 여러분이 세 소문항 모두에서 발견한 것이다. 이 변환은 리만 구(Riemann sphere) 위에서 가장 잘 이해되는데, 거기서는 "무한원점(point at infinity)"을 덧붙여 $w = 1$의 빈자리를 채운다. 그 친척인 케일리 변환(Cayley

transform) $z \mapsto (z - \mathrm{i})/(z + \mathrm{i})$는 상반평면(upper half-plane)을 단위원판(unit disc)으로 보낸다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)에 이 모든 것에 대한 아름다운 기하학적 설명이 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.