풀이

STEP III 1988, 문제 2

순수수학 • 선형 점화식

> **STEP III 1988, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/88-s3-q2

핵심 아이디어

상수 계수 선형 점화식(linear recurrence with constant coefficients)은 이차식처럼 행동한다. 거듭제곱 x^n이 점화식의 해가 될 필요충분조건은 x가 보조방정식(auxiliary equation)의 근인 것이다. 처음 두 항이 정해지면 점화식이 나머지 모든 항을 결정하므로, u_0과 u_1만 맞추면 유일한 해를 얻는다. 마지막 부분은 계수가 변하지만, 인수 $(n+1)$, $(n+2)$, $(n+3)$을 보면 이들의 곱으로 양변을 나누어 볼 생각이 든다. 그러면 간단한 치환으로 앞에서 다룬 종류의 상수 계수 점화식이 된다.

풀이

(시험지에는 점화식의 최고차 계수가 α로 인쇄되어 있다. 이는 이차식 ax^2+bx+c에 맞추어 a로 써야 할 것을 잘못 인쇄한 것이 분명하므로, 그렇게 읽기로 한다.) 이차식이 두 근을 가지므로 실제로 이차식이고, 따라서 $a \neq 0$이다.

주어진 식은 점화식을 만족한다

임의의 상수 A, B에 대하여 $u_n = A\alpha^n + B\beta^n$이라 하자. 그러면

$$\begin{aligned} au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n &= A\alpha^n\left(a\alpha^2 + b\alpha + c\right) + B\beta^n\left(a\beta^2 + b\beta + c\right) \\ &= A\alpha^n \cdot 0 + B\beta^n \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

이다. α와 β가 $ax^2+bx+c=0$의 근이기 때문이다. 따라서 모든 $n \geq 0$에 대하여 점화식이 성립한다.

주어진 특정한 A와 B를 쓰면 이 식은 초깃값도 재현한다. $n = 0$일 때

$$A + B = \frac{(u_1 - \beta u_0) - (u_1 - \alpha u_0)}{\alpha - \beta} = \frac{(\alpha - \beta)u_0}{\alpha - \beta} = u_0,$$

이고, $n = 1$일 때

$$A\alpha + B\beta = \frac{\alpha u_1 - \alpha\beta u_0 - \beta u_1 + \alpha\beta u_0}{\alpha - \beta} = \frac{(\alpha - \beta)u_1}{\alpha - \beta} = u_1.$$

이다. 두 근이 서로 다르므로 $\alpha - \beta$로 나눌 수 있다.

이것이 유일한 해이다

> **생각해 보기** 정확히 무엇에 대하여 귀납법을 쓰는가? 그리고 왜 한 번에 두 항씩 다루어야 하는가?

$u_0, u_1, u_2, \ldots$이 점화식을 만족하는 임의의 수열이라 하고, 이 수열의 u_0과 u_1로 위와 같이 A, B를 만들자. $w_n = A\alpha^n + B\beta^n$이라 쓴다. n에 대한 수학적 귀납법(induction)으로 다음 명제를 증명한다.

$$P(n): \quad u_n = w_n \text{ 이고} u_{n+1} = w_{n+1}.$$

새로운 항은 각각 바로 앞의 두 항에 의존하므로, 명제는 연속된 두 항을 함께 담고 있어야 한다.

기저 단계. $P(0)$은 $u_0 = w_0$이고 $u_1 = w_1$이라는 명제이며, 이는 위에서 확인하였다.

귀납 단계. $P(n)$을 가정하자. (u_n)과 (w_n) 모두 점화식을 만족하고 $a \neq 0$이므로

$$u_{n+2} = -\frac{bu_{n+1} + cu_n}{a} = -\frac{bw_{n+1} + cw_n}{a} = w_{n+2}.$$

이다. 이것과 $u_{n+1} = w_{n+1}$을 합치면 $P(n+1)$이 된다.

따라서 모든 $n \geq 0$에 대하여 $P(n)$이 성립하고, 모든 n에 대하여 $u_n = A\alpha^n + B\beta^n$이다. 점화식의 해는 모두 이 꼴이며, A와 B는 u_0과 u_1로 정해진다. 즉 이 식이 유일한 해를 준다.

수열 v_n

각 계수는 세 인수 $(n+1)$, $(n+2)$, $(n+3)$ 중 두 개의 곱이고, 빠진 인수가 계수마다 서로 다르다. $n \geq 0$에서 결코 0이 아닌 $(n+1)(n+2)(n+3)$으로 나누면

$$8\,\frac{v_{n+2}}{n+3} - 2\,\frac{v_{n+1}}{n+2} - \frac{v_n}{n+1} = 0.$$

을 얻는다. 각 분수는 $v_k/(k+1)$ 꼴이다. 그래서

$$w_n = \frac{v_n}{n+1},$$

이라 두면 점화식은

$$8w_{n+2} - 2w_{n+1} - w_n = 0, \qquad w_0 = 0, \quad w_1 = \tfrac{1}{2}.$$

이 된다. 보조방정식은 $8x^2 - 2x - 1 = 0$, 즉 $(2x-1)(4x+1) = 0$이다. 그 근 $\alpha = \frac{1}{2}$와 $\beta = -\frac{1}{4}$는 서로 다른 실수이므로 첫 부분을 적용할 수 있고, $\alpha - \beta = \frac{3}{4}$이다.

$$A = \frac{w_1 - \beta w_0}{\alpha - \beta} = \frac{1/2}{3/4} = \frac{2}{3}, \qquad B = \frac{w_1 - \alpha w_0}{\beta - \alpha} = \frac{1/2}{-3/4} = -\frac{2}{3}.$$

따라서 $w_n = \frac{2}{3}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{4}\right)^n\right)$이다. 첫 부분에 의하여 이것이 w_n이 될 수 있는 유일한 경우이고, 따라서 v_n도 마찬가지이다. 다시 $n+1$을 곱하면

$$\boxed{v_n = \frac{2(n+1)}{3}\left(\frac{1}{2^n} - \left(-\frac{1}{4}\right)^n\right)} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

검산

이 식에서 $v_0 = \frac{2}{3}(1-1) = 0$, $v_1 = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = 1$이 나오므로 조건에 맞는다. 원래 점화식에 $n = 0$과 $n = 1$을 직접 넣어 계산하면 $16v_2 = 6v_1 + 6v_0$이므로 $v_2 = \frac{3}{8}$이고, 이어서 $48v_3 = 16v_2 + 12v_1$이므로 $v_3 = \frac{3}{8}$이다. 식에서도 $v_2 = 2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16}\right) = \frac{3}{8}$, $v_3 = \frac{8}{3}\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{64}\right) = \frac{3}{8}$로 일치한다. 또한 유리수 연산으로 n이 41까지일 때 이 식이 점화식과 정확히 일치함을 확인하였고, 첫 부분은 무작위로 고른 수백 개의 이차식과 초깃값에 대하여 확인하였다.

흔한 실수

- 한 번에 한 항씩 귀납법을 하는 것. $u_n = w_n$만 알아서는 u_{n+1}에 대하여 아무것도 이끌어 낼 수 없다. 귀납 가정은 연속된 두 항을 포함해야 한다.
- a로 나눌 수 있는 이유(방정식이 두 근을 가지므로 0이 아니다)와 $\alpha - \beta$로 나눌 수 있는 이유(두 근이 서로 다르다)를 밝히지 않는 것.
- 첫 부분을 v_n에 곧바로 적용하는 것. v_n의 점화식은 계수가 n에 의존하므로, 첫 부분을 적용할 대상은 크기를 조정한 수열 $w_n = v_n/(n+1)$이다.

STEP 너머

이계 선형 점화식의 해 전체는 이차원 벡터 공간(vector space)을 이루며, α^n, β^n은 그 기저(basis)이다. 이는 해가 $e^{\alpha x}$와 $e^{\beta x}$인 미분방정식(differential equation) $ay'' + by' + cy =$

0과 정확히 평행한 상황이다. 2×2 행렬 M을 써서 점화식을 $\mathbf{u}_{n+1} = M\mathbf{u}_n$으로 쓰면 α와 β가 M의 고윳값(eigenvalue)임을 알 수 있고, 중근은 대각화(diagonalise)할 수 없는 행렬에 대응한다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 바로 이런 방식으로 고윳값을 통해 차분방정식을 다루며, 보이스(Boyce)와 디프리마(DiPrima)의 *Elementary Differential Equations*(미분방정식 입문)는 미분방정식에 대하여 이와 평행한 이론을 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.