풀이

STEP III 1988, 문제 14

역학 • 매끄러운 철사 위의 운동

STEP III 1988, 14번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

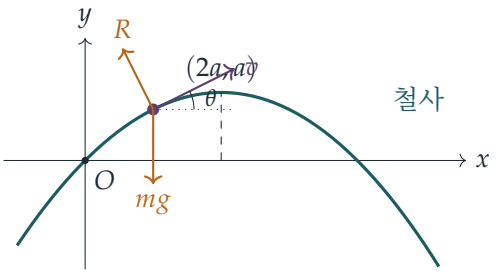
step.maths.org/questions/88-s3-q14

핵심 아이디어

철사로부터 아무 힘도 받지 않는 구슬은 그저 중력만 받으며 움직이는 포물체(projectile)이다. 따라서 소문항 (i)이 묻는 것은 다음과 같다. 철사 방향으로 쏘아 올린 자유 포물체가 철사의 포물선을 정확히 따라갈 수 있는가? 두 포물선을 일치시켜 보자. 소문항 (ii)에서는 철사가 매끄러우므로(smooth) 에너지가 보존된다. 핵심 작업은 $\tan\theta = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$를 이용하여 속력과 높이를 기울기 각 θ로 나타내는 것이다.

풀이

구슬을 매끄러운 고정 철사 위에 있는 질량 m인 입자로 모형화한다. 작용하는 힘은 아래쪽으로 작용하는 무게 mg와, 철사에 수직인 철사의 수직항력(normal reaction) R뿐이다.



철사에 관한 두 가지 사실을 풀이 내내 사용한다. 일반적인 점에서

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 - \frac{x}{2a},$$

이므로 원점에서 기울기는 1이고, 구슬은 x축 위로 45° 방향으로 출발한다. 철사는 아래로 볼록한 포물선이므로 가장 높은 점은 $x = 2a, y = a$이다.

소문항 (i)

운동하는 동안 줄곧 $R = 0$이라고 하자. 그러면 중력이 유일한 힘이므로 구슬은 처음 속력 V로 45° 방향으로 쏘아 올린 포물체와 똑같이 움직인다. 수평 속도는 $V/\sqrt{2}$로 일정하므로 $x = Vt/\sqrt{2}$이다. 또한

$$y = \frac{V}{\sqrt{2}}\,t - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

$t = \sqrt{2}\,x/V$를 대입하여 소거하면 궤적(trajectory)은

$$y = x - \frac{gx^2}{V^2}.$$

이것이 구슬의 경로가 되려면, 구슬이 도달하는 모든 x에 대하여 이 곡선이 철사 $y = x - x^2/(4a)$와 같아야 한다. 이를 위해서는

$$\frac{g}{V^2} = \frac{1}{4a}, \qquad \text{즉,} \qquad V = 2\sqrt{ag}.$$

이어야 한다.

역으로 $V = 2\sqrt{ag}$라 하자. 이 속력으로 O에서 45° 방향으로 쏘아 올린 자유 입자는 곡선 $y = x - x^2/(4a)$, 곧 철사 자체를 따라간다. 따라서 이 입자는 매 순간 $R = 0$인 채로 철사를 따라 움직이고, 이 운동은 수직항력이 0인 구슬의 운동 방정식(equation of motion)을 만족한다. $x = Vt/\sqrt{2}$는 꾸준히 증가하므로 구슬은 꼭대기 $(2a, a)$를 지나 반대편으로 계속 내려간다. 운동하는 내내 구슬은 요구된 대로 철사에 아무런 압력도 가하지 않으며, 알맞은 속력은 $V = 2\sqrt{ag}$이다.

생각해 보기 철사 위의 구슬이 어떻게 수직항력 없이 움직일 수 있을까? 철사가 구슬을 붙잡아 주어야 하지 않을까?

철사가 힘을 가해야 하는 것은 중력만으로는 구슬이 곡선을 벗어나게 될 때뿐이다. 다른 속력이라면 실제로 그렇게 된다. V가 더 크면 포물체의 포물선이 더 완만해지므로 철사가 구슬을 아래로 끌어당겨야 한다. V가 더 작으면 포물선이 더 급하게 휘므로 철사가 구슬을 위로 받쳐야 한다. 정확히 $V = 2\sqrt{ag}$일 때에는 곡선이 요구하는 가속도를 중력이 이미 제공하므로 철사는 할 일이 없다.

소문항 (ii)

이제 V는 일반적인 값이다. 속도는 철사의 접선(tangent) 방향이므로

$$\tan\theta = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 - \frac{x}{2a}, \qquad \text{따라서} \qquad x = 2a(1 - \tan\theta).$$

(구슬이 뒤로 미끄러져 내려오면 속도는 접선을 따라 반대 방향을 향하고 각은 π만큼 바뀐다. 이때 $\tan\theta$와 $\cos^6\theta$는 변하지 않으므로 아래 내용에는 아무 영향이 없다.)

속력을 θ로 나타내기. $x = 2a(1-\tan\theta)$를 t에 대하여 미분하면

$$\dot{x} = -2a\sec^2\theta\,\dot{\theta}.$$

$\dot{y} = \tan\theta\,\dot{x}$이므로 속력 v는 다음을 만족한다.

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{x}^2(1+\tan^2\theta) = \dot{x}^2\sec^2\theta = \frac{4a^2\dot{\theta}^2}{\cos^6\theta}.$$

높이를 θ로 나타내기. $T = \tan\theta$로 두면 $x = 2a(1-T)$이므로

$$\begin{aligned} y = x - \frac{x^2}{4a} &= 2a(1-T) - a(1-T)^2 \\ &= a(1-T)\big(2-(1-T)\big) \\ &= a(1-T)(1+T) = a(1-\tan^2\theta). \end{aligned}$$

에너지. 철사는 매끄럽고 R는 속도에 수직이므로 R는 일을 하지 않으며, 역학적 에너지가 보존된다(conservation of mechanical energy). 구슬은 속력 V로 O에서 출발하므로

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + mgy = \tfrac{1}{2}mV^2, \qquad \text{즉,} \qquad v^2 + 2gy = V^2.$$

v^2와 y에 대한 식을 대입하면

$$\frac{4a^2\dot{\theta}^2}{\cos^6\theta} + 2ga(1-\tan^2\theta) = V^2,$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

검산

- $t = 0$에서 $\theta = 45^\circ$이므로 $\tan^2\theta = 1$이고 둘째 항은 0이 된다. 그러면 첫째 항은 $v^2 = V^2$로, 마땅히 그래야 하는 값이다.
- 소문항 (i)의 $V^2 = 4ag$를 쓰면 $\dot{x} = V/\sqrt{2}$가 일정하므로 $\dot{\theta} = -\dot{x}\cos^2\theta/(2a)$이다. 첫째 항은 $2ag\sec^2\theta = 2ag(1+\tan^2\theta)$가 된다. 여기에 $2ga(1-\tan^2\theta)$를 더하면 $4ag = V^2$가 된다. 두 소문항의 결과가 일치한다.
- 수치적으로, 룽게-쿠타(Runge–Kutta) 방법을 써서 철사를 따라 구슬의 운동 방정식을 단계별로 풀어 보았다. $a = 1$, $g = 9.8$, $V = 2\sqrt{9.8}$일 때, 계산된 수직항력은 (단위 질량당) $x \approx 13$에 이르기까지 내내 10^{-15} 아래에 머물렀다. V를 30% 늘리면 처음에 약 4.8이었다. 구슬이 뒤로 미끄러지는 경우를 포함하여 V의 여러 무작위 값에 대해, (ii)의 항등식은 약 10^{-13}의 상대 오차 이내로 성립하였다.

흔한 실수

- 쏘아 올리는 순간에만 $R = 0$임을 보이는 것. 문제는 **운동 내내** 수직항력이 없는 운동을 요구하며, 그래서 궤적 전체를 철사와 일치시킨 것이다.
- $\tan\theta$를 미분할 때 연쇄법칙(chain rule)에서 나오는 인수 $\sec^2\theta$를 빠뜨리는 것. 그러면 첫째 항에 $\cos^6\theta$ 대신 $\cos^2\theta$가 남는다.

STEP 너머

소문항 (ii)는 운동의 제1적분(first integral)이다. 에너지 보존을 이용하면 2계 방정식이 하나의 좌표(여기서는 θ)에 대한 1계 방정식으로 줄어든다. 대학 1학년 과정에서는 이것이 구속 운동(constrained motion)에 대한 라그랑주 방법(Lagrangian approach)으로 발전하는데, 이 방법에서는 구속 조건을 기술하는 좌표 하나를 고르기만 하면 수직항력을 전혀 계산할 필요가 없다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 구속 운동과 에너지 방법을 꼼꼼하게 다루는 것을 살펴보기에 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.