풀이

STEP III 1988, 문제 13

역학 • 공기 저항을 받는 포물체

STEP III 1988, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/88-s3-q13

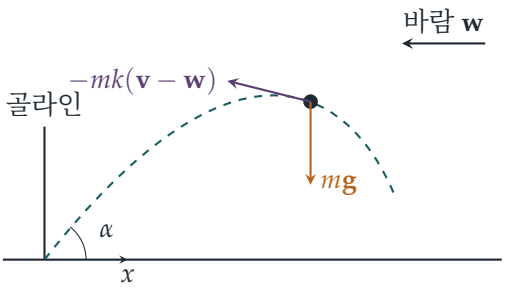
핵심 아이디어

속도에 비례하는 공기 저항(air resistance)이 작용하면 운동 방정식(equation of motion)이 선형(linear)이 되므로, 각 성분을 적분인자(integrating factor)로 풀 수 있다. 마지막 소문항을 깔끔하게 이해하는 방법은 종단 속도(terminal velocity)가 무엇인지 묻는 것이다. 속도는 처음 값에서 종단 속도를 향해 지수적으로 다가가므로, 이 두 벡터가 평행하면 속도는 원점을 지나는 한 직선을 결코 벗어나지 않는다. 그러면 공은 같은 직선 경로를 따라 날아갔다가 되돌아온다.

풀이

운동 방정식

공을 질량 m인 입자로 모형화한다. 공에는 두 힘이 작용한다. 하나는 무게 $m\mathbf{g}$이고, 다른 하나는 공기 저항이다. 공기에 대한 공의 상대 속도는 $\mathbf{v} - \mathbf{w}$이고, 저항은 이에 반대 방향으로 작용하므로 저항은 $-mk(\mathbf{v} - \mathbf{w})$이다.



뉴턴의 제2법칙(Newton's second law)에 의해

$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = m\mathbf{g} - mk(\mathbf{v} - \mathbf{w}).$$

양변을 m으로 나누고 정리하면

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} + k\mathbf{v} = \mathbf{g} + k\mathbf{w},$$

이므로 원하는 식을 얻는다.

시각 t에서의 위치

공을 찬 지점을 원점으로 잡고, x축은 공을 찬 방향의 수평 방향, y축은 연직 위쪽 방향으로 잡는다. $V = |\mathbf{v}_0|$, $W = |\mathbf{w}|$, $g = |\mathbf{g}|$라 하자. 공은 바람을 **거슬러** 차므로

$$\mathbf{w} = (-W, 0), \qquad \mathbf{g} = (0, -g), \qquad \mathbf{v}_0 = (V\cos\alpha, V\sin\alpha).$$

$\mathbf{v} = (u, v)$로 두면 운동 방정식의 두 성분은

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + ku = -kW, \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + kv = -g.$$

첫째 식에 적분인자 e^{kt}를 곱하면 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u\,\mathrm{e}^{kt}) = -kW\mathrm{e}^{kt}$이므로 $u\,\mathrm{e}^{kt} = -W\mathrm{e}^{kt} + C$이다. $t = 0$일 때 $u = V\cos\alpha$이므로 $C = V\cos\alpha + W$이고,

$$u = -W + (V\cos\alpha + W)\,\mathrm{e}^{-kt}.$$

똑같은 방법으로

$$v = -\frac{g}{k} + \left(V\sin\alpha + \frac{g}{k}\right)\mathrm{e}^{-kt}.$$

$t = 0$일 때 $x = y = 0$이고 $\int_0^t \mathrm{e}^{-ks}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{k}(1 - \mathrm{e}^{-kt})$임을 이용하여 0부터 t까지 한 번 더 적분하면

$$x = -Wt + \frac{V\cos\alpha + W}{k}(1 - \mathrm{e}^{-kt}),$$
$$y = -\frac{g}{k}\,t + \frac{1}{k}\left(V\sin\alpha + \frac{g}{k}\right)(1 - \mathrm{e}^{-kt}).$$

$\mathbf{u}_\infty = \mathbf{w} + \mathbf{g}/k$(종단 속도로, 운동 방정식의 상수해이다)를 써서 벡터 꼴로 나타내면

$$\mathbf{r} = \mathbf{u}_\infty t + \frac{1}{k}\,(\mathbf{v}_0 - \mathbf{u}_\infty)(1 - \mathrm{e}^{-kt}).$$

자책골

? **생각해 보기** $\tan\alpha = g/(kW)$는 종단 속도에 대해 무엇을 말해 주는가?

종단 속도는 $\mathbf{u}_\infty = (-W, -g/k) = -W(1, g/(kW))$이다. 주어진 조건은 $g/(kW) = \tan\alpha$이므로 $\mathbf{u}_\infty = -W(1, \tan\alpha)$이고, 이는 $\mathbf{v}_0$에 평행하다(방향은 반대이다). 벡터 공식을 보면 이때 $\mathbf{r}$는 항상 방향 $(\cos\alpha, \sin\alpha)$를 따르는 두 벡터의 결합이므로, 공은 직선 $y = x\tan\alpha$를 따라 움직인다.

성분으로부터 직접 확인하려면 $g/k = W\tan\alpha$를 이용한다.

$$V\sin\alpha + \frac{g}{k} = V\sin\alpha + W\tan\alpha = \tan\alpha\,(V\cos\alpha + W),$$

따라서

$$y = \tan\alpha\left[-Wt + \frac{V\cos\alpha + W}{k}(1 - \mathrm{e}^{-kt})\right] = x\tan\alpha \quad \text{모든} t \geq 0.$$

에 대해 성립한다.

그러므로 공이 지면 높이 $y = 0$에 있는 것은 정확히 $x = 0$일 때이다($\tan\alpha \neq 0$이므로). 이제 이런 일이 어떤 $t > 0$에서 일어남을 확인하면 된다. $f(t) = x(t)$라 하자. 그러면 $f(0) = 0$이고 $f'(0) = V\cos\alpha > 0$이므로, 공을 찬 직후에는 $x > 0$이다. 또한

$$f''(t) = -k(V\cos\alpha + W)\,\mathrm{e}^{-kt} < 0,$$

이므로 f는 순오목(strictly concave) 함수이고, $-Wt$ 항 때문에 $t \to \infty$일 때 $f(t) \to -\infty$이다. 따라서 f는 양의 영점 T를 정확히 하나 가지며, 그 점에서 $f'(T) < 0$이다(0에서 올라간 오목함수가 다시 0으로 내려올 때는 감소하고 있어야 한다).

시각 T에서 공은 원점, 즉 공을 찼던 골라인(goal-line) 위의 점으로 돌아오며, 이때 수평 속도는 음수, 곧 골대 쪽을 향한다. 공은 날아갔던 직선을 따라 그대로 되돌아왔고, 크로스바(crossbar)보다 한참 아래인 지면 높이에서 골라인을 넘는다. 골키퍼가 비켜나 있다면 이것은 자책골(own goal)이다.

검산

- $k \to 0$일 때 $\frac{1}{k}(1 - \mathrm{e}^{-kt}) \to t$이고 $\frac{1}{k}\left(t - \frac{1}{k}(1 - \mathrm{e}^{-kt})\right) \to \frac{1}{2}t^2$이므로 $x \to Vt\cos\alpha$, $y \to Vt\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$이다. 이는 보통의 포물체 운동이다.
- $t \to \infty$일 때 속도는 운동 방정식의 상수해인 $(-W, -g/k)$로 수렴(converge)한다. 즉 공은 결국 종단 속력으로 떨어지면서 바람에 실려 떠내려간다.
- 운동 방정식을 룽게–쿠타(Runge–Kutta) 방법으로 수치 적분한 결과는 V, α, W, k를 무작위로 여러 번 고른 경우에 대해 x, y의 공식과 약 10^{-13} 이내로 일치했다. $\tan\alpha = g/(kW)$일 때 계산된 경로는 $y = x\tan\alpha$ 위에 머물렀고 $u < 0$인 상태로 $x = 0$에 떨어졌다. 반면 예를 들어 $V = 20$, $\alpha = 0.6$, $W = 5$, $k = 0.5$일 때는 경기장 안쪽으로 17.1 m 떨어진 곳에 떨어졌다.

흔한 실수

- 저항을 $-mk(\mathbf{v}-\mathbf{w})$ 대신 (지면에 대한) $-mk\mathbf{v}$로 잡는 것.
- $\mathbf{w}$의 부호를 잘못 잡는 것. 공은 바람을 **거슬러** 차므로 $\mathbf{w}$는 골대 쪽을 향한다.
- $y = x\tan\alpha$에서 멈추고, 공이 정말로 $x = 0$으로 돌아오는지, 그리고 돌아올 때 골대 쪽으로 움직이는지 확인하지 않는 것.

STEP 너머

상수 $\mathbf{F}$에 대한 방정식 $\dot{\mathbf{v}} + k\mathbf{v} = \mathbf{F}$는 선형계가 평형(equilibrium)으로 다가가는 가장 간단한 예이다. 편차 $\mathbf{v} - \mathbf{F}/k$는 e^{-kt}처럼 감소한다. 선형 항력(drag)은 느리고 작은 물체에서만 현실적이다. 실제 축구공은 대략 속력의 제곱에 비례하는 항력을 받는데, 이 때문에 방정식이 비선형(nonlinear)이 되고 수평 운동과 연직 운동이 서로 얽힌다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)에서 두 종류의 항력을 모두 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.